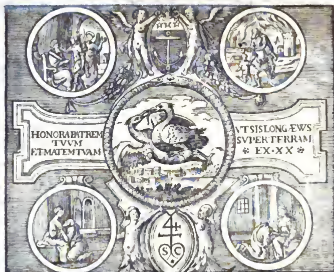
ISMAELIS BVLLIALDI DE LINEIS SPIRALIBVS DEMONSTRATIONES NOVÆ.



PARISIIS,
Apud SEBASTIANVM CRAMOISY Regis & Reginæ Architypographum :
Et GABRIELEM CRAMOISY, viâ Iacobæâ, sub Ciconiis.

M. DC. LVII.
CVM PRIVILEGIO REGIS.





SERENISSIMO
AC ILLVSTRISSIMO PRINCIPI
HENRICO
BORBONIO
EPISCOPO METENSI,
SACRI ROMANI IMPERII PRINCIPI,
Duci Vernolij, Pari Franciæ, Comiti Belgencij, Abbati sancti Germani à Pratis, Fiscani, &c.

ISMAEL BVLLIALDVS S. P. D.



ERENISSIME PRINCEPS,

Linearum spiralium contemplatio tam sublimis ac ardua antiquis Geometris visa est, vt Archimedes, qui earum affectiones, & proprietates ingenio propè diuino, ac subtilitate incomparabili primus

demonstrauit, in sui admirationem cùm æquales tum posteros conuerterit: laudum titulos nullo obliuionis situ inducendos meruerit; earúmque inuentori Cononi gloriam palmámque præripuerit. De linearum equidem istarum inuentione eximia gloriari potuit Conon; attamen cùm generosis tanti viri conatibus mors incœptis magnis inimica obstitisset, absque Archimedis ope fructum voluptatémque ex illa percipere nemo potuisset. Theoremata quippe ab illo proposita derelicta iacebant: nec vllus, præter Syracusanum artificem, tanti ædificij molem construendam suscipere ausus erat. Quis ergo non attonitus oculos in me coniiciet? quis audacem nimis non pronunciabit, qui tanti Heroïs vestigia premere ac sequi mecum constituerim? aut nouas demonstrationes conficere me posse quis credet, quibus aut lucem Archimedæis adferre, aut, quæ minùs clarè ostensa sunt, illustrare possim? Tam nobile igitur in Geometria argumentum tractaturus, atque publici iuris facturus, mihi causæque meæ patronum idoneum quærere, conueniens ac necessarium duxi, qui obtrectatorum calumnias & inuidiam à me propellat, & æquos bonósque operis mei iudices tueri valeat. Quem itaque meliorem aut generosiorem quàm Te patronum, SERENISSIME PRINCEPS, *delegissem, cùm beneficentiâ tuâ huius libelli editionem promoueris; quem sapientiorem, cùm eruditus sis, & eruditos ames; non etiam humaniorem alium vnquam.*

nactus fuissem. Tam præclaris enim virtutibus ornatus tanto magis emicas, quanto rariores, hocce ad barbariem vergente sæculo, tui similes apparent. Sub TVÆ CELSITVDINIS *itaque auspiciis faustis fœlicibúsque in publicum prodeat ingenij mei hic qualiscumque fœtus; laudúmque tuarum præconia imprimis canat. Tu vero,* SERENISSIME PRINCEPS, *mihi fauere non cessa, clientémque tuum, qui te venerabundus colit, totóque pectore* CELSITVDINI TVÆ *deuotissimus & addictissimus est, læto vultu excipe, ac benignè foue.*

Scribebam Lutetiæ Parisiorum Kal. Septemb. 1656.





AD LECTOREM PRÆFATIO.



RCHIMEDIS de lineis ſpiralibus tractatum cùm bis térque legiſſem, totáſque animi vires intendiſſem, vt ſubtiliſſimarum demonſtrationum de ſpiralem tangentibus artificium adſequerer; nuſquam tamen, ingenuè fatebor, ab earum contemplatione ita certus receſſi, quin ſcrupulus animo ſemper hæreret, vim illius demonſtrationis me non percepiſſe totam. Tam accuratum ac ſubtilem Geometram rem non perfeciſſe ſuſpicari, ſcelus mihi videbatur; adeóque ingenij mei acumen retuſius agnoſcere, quàm vt tam abditum Geometriæ ſecretum penetrare poſſem, melius duxi. Illa verò quæ Archimedes oſtenderat, num aliis mediis demonſtrari poſſent, inquiſiui, vt tandem veritate illorum mihi patefacta, in ea animus conquieſceret. Videbam non ſolùm mihi, ſi res feliciter ceſſiſſet, lucem allaturas nouas demonſtrationes, ſed aliis etiam, quibus Archimedis explicatio prolixa nimis, nec omnino clara videretur, cuíque aſſenſum confidenter ac ſecurè non præbebant. Rem ita ſe habere ſummi Viri Franciſci Vietæ auctoritas prorſus vt crederem fecit; qui in Geometriæ ſupplemento monet, tactu helicis propoſuiſſe Archimedem, exhiberi lineam rectam circumferentiæ circuli æqualem, id verò ſatis non conſtare. Dubitat enim Vieta, an circu-

lari æqualem exhibuerit Archimedes; eo quòd lineam rectam maiorem ambitu cuiuscumque polygoni circulo inscripti, minorem autem ambitu cuiuscumque polygoni circumscripti descripserit; & tandem concludit hisce verbis, *si verè Archimedes, fallaciter conclusit Euclides.* Atque etiam cap. 14. lib. 8. Responsorum propositionibus 1. & 4. demonstrationem Archimedis de contingente helicem linea asserit Euclidi & Euclidæorum sententiæ aduersari. Constare tamen illam clarissimè agnoscit cap. 8. eiusdem libri, vbi volutarum seu spiralium vsum in dimensione circuli, Nicomedis, Dinostrati, & Hippiæ quadratrici anteponit.

Archimedis equidem demonstratio ad absurdum atque impossibile deducit, ostendítque rectam lineam à principio spiralis ductam, perpendicularem ad illam, quæ principium & terminum seu finem primæ circulationis coniungit, interceptámque à tangente recta spiralem in termino circulationis, neque maiorem, neque minorem esse posse circumferentiâ circuli primi; & ideo quòd directa non sit demonstratio, minùs satisfacere ipsa videtur. Hoc itaque theorema si directè demonstrauerimus, & constare Archimedis demonstrationem probabimus, & clariorem ipsam reddemus veritatem. Id autem duabus demonstrationibus, duobúsque mediis differentibus effecimus, vno quidem per euolutionem circuli; altero per circuli sectorem adsumptum. Spatium verò à spirali linea contentum & linea recta, quam rationem ad circulum teneat, per inscriptas & circumscriptas figuras, ad impossibile deducendo, ostendit Archimedes. Verùm hac in parte, vt in priori, artificium suum satis non

explicuit; nec rationem reddidit, quare magnitudinum maximæ & inter se æqualium numerum, vnitate maiorem accipiat numero rectarum continua progressione æqualiter auctarum. id est, quare numerum semidiametrorum circuli vnitate maiorem numero linearum, quæ à principio spiralis ductæ sunt, ponat, vt spatia inter se comparet: ídque solummodo de sectoribus prop. 21. sed minùs clarè indicauit.

Duplici methodo eáque directa id ipsum ostendimus, per inscripta scilicet polygona, itémque per figuras, ex semidiametris tam circulo quàm spirali inexistentibus, quadratas; atque etiam per repertam à Bonauentura Cauallerio Geometra insigni, appellatámque *Indiuisibilium* methodum. Hoc quantumcumque erit, æqui boníque vt faciant, Geometras omnes rogo, & si quid peccatum sit vel omissum, mihi vt condonent, oro.

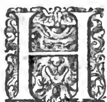
Errata pauca in impressione admissa corriget beneuolus Lector, antequam ad legendum accedat.

PAGINA 11. *in fine propositionis 9 lege* æqualis arcui V M.
Pag. 16. prop. 13. lin. 17. lege rectus arcus T P.
Pag. 48. lin. 5. lege A Q, B P, C O.
Pag. 64. in tabula initio col. 1. lege A I B. 24.
In textu lin. 2. lege septem BCR, &c. & octo BAR, &c.
Ad pag. 58. referenda est figura pag. 75. & ad pag. 99. figura pag. 97.
Pag. 99. lin. 16. lege tertij quadrantis spatij.

ISMAELIS



ISMAELIS BVLLIALDI
DE LINEIS SPIRALIBVS
DEMONSTRATIONES NOVÆ.

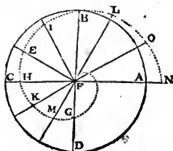


Ic nota ſupponimus illa, quæ Archimedes libro de lineis Spiralibus, propoſitionibus 1. & 2. oſtendit. puncti nempe æquè velociter lati per lineam aliquam, æqualibus temporibus æquales partes lineæ percurrere. & ſe habere totum tempus, ad totam lineam; vt pars temporis, ad ſimilem lineæ partem ſe habet. & permutando. vt totum tempus, ad totam partem temporis, ita totam lineam, ad lineæ partem ſe habere.

Si etiam duo puncta in duabus lineis, vnumquodque ſibi ipſi æquè velociter ferantur ; ſumantur autem in vtraque ipſarum duæ lineæ primæ, quæ in æqualibus temporibus à punctis fuerunt permeatæ, & item ſecundæ; habebunt ſumptæ lineæ eandem inter ſe proportionem. proportionales enim ſunt totæ lineæ toti tempori : & ob æquevelocitatem vniuſcuiuſque ſibi, pars temporis eadem partibus analogis vtriuſque lineæ reſpondebit.

Notam etiam ſupponimus eiuſdem Archimedis demonſtrationem propoſit. 12. hoc eſt, omnes lineas in vna circulatione ab F principio ad ſpiralem ductas nempe F G, F M, F K, F H, F E, F I, quæ æquales angulos G F M, M F K, &c. ad inuicem efficiant, ipſas ſeſe æqualiter excedere.

Item quod propoſitione 13. ab ipſo eſt oſtenſum; lineam rectam in vno tantùm puncto ſpiralem contingere.



Tandemque quod 14. & 15. propositionib. demonstrauit. Si in lineam spiralem in prima circulatione descriptam incidant duæ rectæ lineæ F H, F B à puncto F, quod est ipsius principium, ductæ, eandem inter se proportionem habebunt in spiralem lineam incidentes FH, FB; quam circumferentiæ circuli, inter B terminum lineæ spiralis, & terminos linearum ad circumferentiam productarum, interiectæ; circumferentias à termino lineæ spiralis versus præcedentia sumendo. Hoc est lineam F H esse ad FB, vt B A D C circumferentia est ad B A D C B circumferentiam. Paritérque erit F G ad F H, vt B A D circumferentia ad B A D C circumferentiam. Atque etiam in secunda circulatione LON propter eandem rationem erit F B ad F N, vt tota circumferentia BACD ad totam B A C D vna cum BA circumferentiæ parte.

Spiralis lineæ generatio talis est. Si recta linea F B in plano ducta, manente eius altero termino F, æquè velociter circumferatur, quo vsque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cœperat: eodémque tempore aliquod punctum feratur in dicta linea, æquè velociter ipsum sibi, incipiens à termino manente F, punctum hocce in plano spiralem F G H E I B describet.

Vocetur autem F, terminus lineæ manens, principium lineæ spiralis.

Positio lineæ FB, à qua cœpit circumferri, principium circulationis dicatur.

Recta linea FB, quam in prima circulatione punctum pertransiuit, vocetur prima: & quam dictum punctum pertransiit in secunda circulatione, secunda linea vocetur; atque aliæ similiter eodem nomine vocentur, quo & ipsæ circulationes.

Spatium contentum spirali linea in prima circulatione descripta F G H B, & linea recta F B, quæ prima est, primum dicatur. contentum verò linea spirali in secunda circulatione, & secunda linea, secundum; & alia sequentia iuxta circulationum denominationem.

Si à puncto F, quod eſt principium lineæ ſpiralis, ducatur aliqua recta linea F H; illius lineæ ſpiralis partes, quæ ſunt verſus H E I B, in quibus circulatio fit, præcedentes dicantur, ſeu in præcedentia εἰς τὰ προηγούμενα: quæ verò verſus H K G ſequentes dicantur, ſiue in ſequentia, εἰς τὰ ἑπόμενα.

Circulus A B C D deſcriptus, centro quidem puncto F, quod eſt principium ſpiralis, interuallo autem recta linea prima F B, primus vocetur: & deſcriptus eodem centro, & linea dupla primæ, ſecundus; aliíque deinceps tertius, quartus &c. continua ſerie & ordine.

Euolutionem autem circuli hîc appellamus, quando per planum ipſe reuolutus, contactu continuo peripheriæ lineam rectam deſcribit; quæ recta, ſi inflecteretur, toti peripheriæ applicata conueniret, ipſique æqualis eſſet. vel ſi peripheria explicaretur ac in directum porrigeretur, toti rectæ lineæ applicata conueniret, ipſique æqualis eſſet. Vide figuram prop. 2.

PROPOSITIO PRIMA.

Sinus verſi in circulo incipientes minorem habent ad ſemidiametrum circuli rationem, quàm arcus ipſis reſpondentes ad totam circumferentiam. & in tanto minori ſunt ratione ad ſemidiametrum, quàm arcus ipſis reſpondentes ad totam circumferentiam, quanto minus à principio abſunt.

DEMONSTRATIO.

DEMONSTRATVM eſt, figuræ circumſcriptæ ambitum maiorem eſſe circumferentia circuli; quare quadrati circulo circumſcripti ambitus maior erit circuli circumferentiâ. quæ ideo minor eſt, quatuor eiuſdem circuli diametris, & non eſt ad ipſum quadrati latus quadrupla. hoc poſito, quod propoſitum eſt demonſtrabitur.

Sit ergo circulus BCO, cuius diameter EO, ſemidiameter XO, cùm ergo EO, deducto ſinu recto PD, ita ſecetur vt ED, DP, DO, ſint continuè proportionales, poteſt D O eius accipi magnitudinis, vt rectæ EO ſit 1. pars, qualium ipſa EO erit 10001. & qualium fuerit DE 10000. talium tunc erit PD 100. ſeu vna centeſima

pars rectæ DE. erit verò eadem PD 100. qualium quater OE est 40004. id est vna quadringentesima ferè pars totius ambitus circumscripti quadrati. Maior ergo erit ratio rectæ PD ad quater EO, quam OD ad DE. siquidem vna quadringentesima ferè pars maior est vna decies millesima parte. Sed arcus PO maior est recta PD; ergo & arcus PO multo maiorem habebit rationem ad quadruplam OE, quàm OD ad DE. atqui ambitus circuli minor est quadrupla OE. ergo arcus PO maiorem adhuc rationem tenebit ad ambitum circuli, quam PD ad quadruplam OE. & propterea, adhuc multo maiorem quam OD ad DE.

Sed & adsumpta semidiametro XO, idem demonstratur. erit enim OD partis 1. qualium XO erit 5000 $\frac{1}{2}$. Sed 1. ad 5000 $\frac{1}{2}$ minorem habet rationem, quàm 100. ad 40004. seu in minimis numeris, quàm 1. ad 400 $\frac{4}{100}$. Ergo sinus versi in circulo incipientes minorem habent rationem ad semidiametrum, quàm arcus ipsis respondentes ad totam circumferentiam.

Alteram partem sic demonstrabimus. proportionales continuè sunt lineæ DE, DP, DO. nulla autem adsignari poterit minima DO, quin minor adhuc detur; quæ ad DE multo minorem rationem tenebit, quàm arcus OP sinui verso DE respondens ad totam peripheriam. semper enim erit PD in maiori ratione ad quater OE, quàm ipsa DO ad DE. & ideo arcus OP, ex demonstratis, ad totam circumferentiam in multo maiori erit.

Accipiatur itaque OD. 1. taliúmque DE 1,000,000. talium erit PD 1,000. & OE 1,000,001. erítque PD vna quingentesima fere pars semidiametri OX. ipsa itaque PD erit circumscripti quadrati vna pars quatermillesima. arcus autem PO maior est recta PD, quare in maiori erit ratione ad quadratum circumscriptum penes ambitum, quàm recta PD; & proinde erit arcus PO in maiori ad totam circumferentiam ratione, quam PD ad quadrati circumscripti ambitum.

In hac secunda hypothesi PD est ad OX vt 1000. ad 500,000 $\frac{1}{2}$ seu vt 1. ad 500 $\frac{1}{2000}$. OD verò ad eandem OX, vt 1. ad 500,000 $\frac{1}{2}$. In præcedenti verò hypothesi, erat PD ad OX vt 100; ad 5000 $\frac{1}{2}$. seu vt 1. ad 50 $\frac{1}{100}$. OD verò erat ad eandem vt 1 ad 5000 $\frac{1}{2}$. & in hac secunda, ratio PD ad quadrati ambitum est, vt 1. ad 4000. ferè, quæ in prima erat, vt 1. ad 400. ferè. Ratio itaque OD ad OX in secunda hypothesi decreuit in progressione sub-

centupla, quæ erat enim in prima, vt 1. ad 5000. facta est vt 1. ad 500,000. ratio verò rectæ PD ad quadrati ambitum in secunda hypothesi decreuit in progressione subdecupla; quæ erat enim vt 1. ad 400. facta est vt 1. ad 4000. quare minor facta est ratio OD ad OX, quam rectæ PD ad quadrati circumscripti ambitum. Sed maior est ratio arcus PD ad peripheriam totam, quàm rectæ PD ad quadrati circumscripti ambitum. quare etiam multo minor facta est ratio sinus versi, qui à principio quadrantis minus distat, ad semidiametrum, quàm arcus qui ipsi respondet ad totam circumferentiam. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Cùm itaque ratio sinus versi, in principio quadrantis, minor semper existat ac minor ad semidiametrum, quanto minus à principio quadrantis abest: sinus versus incipiens rationem ad semidiametrum tenere poterit minorem, quàm qualibet semidiametri pars ad eandem semidiametrum.

Quacumque enim data semidiametri parte minor accipi potest. & permutando. sinus versus incipiens minorem rationem tenere poterit in infinitum ad semidiametri partem, quàm semidiameter ad semidiametrum. Id est sinus versus incipiens ad semidiametri partem, minorem in infinitum rationem æqualitatis ratione tenere poterit.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam manifestum est, *Maiorem esse in principio quadrantis rationem sinus recti PD ad totam peripheriam, quàm sinus versi OD ad OX semidiametrum.*

Cùm enim ratio OD ad OX, ostensa sit, vt 1. ad 5000. ratio verò PD ad OX, vt 100 ad 5000, id est in minoribus numeris vt 1. ad 50. erit PD ad octuplum OX, in maiori adhuc ratione (nempe vt 1. ad 400) quàm OD ad OX, id est quàm 1. ad 5000. octuplum autem OX est æquale ambitui quadrati circumscripti, quo minor est tota peripheria. quare multo maiorem adhuc rationem tenebit sinus rectus PD, ad totam peripheriam, quàm sinus versus ad semidiametrum OX.

COROLLARIVM III.

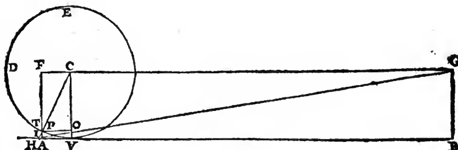
Maior etiam erit ratio sinus recti PD ad sinum versum OD, quàm totius peripheriæ ad semidiametrum OX. permutando enim terminos proportionis præcedentis corollarij hoc demonstratur.

PROPOSITIO II.

Si circulus EDV super HAB linea recta euoluatur, & quoduis in ea punctum accipiatur vt A, in quo circulus ipsam contingat; si ab A in V euoluatur, reuoluatúrque, erit AV euolutionis linea maior sinu recto PO arcûs PV, qui super AV euolutus est.

DEMONSTRATIO.

CVM enim PV arcus super AV euolutus sit, propter euolutionem æquales erunt PV, AV, sed arcus maior est sinu recto ipsi conueniente: quare & linea AV sinu recto PO maior erit. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO III.

Iisdem positis. Dico tangentem arcus PV super AV euoluti, maiorem esse eadem AV.

DEMONSTRATIO.

EST enim tangens pars polygoni circumscripti, aut figuræ cuiusuis circumscriptæ, erit itaque ipsa maior arcu, cui respondet; nam omnis circulo circumscriptæ figuræ ambitus, maior est ipsius circumferentia; & vnaquæque pars figuræ, maior

etiam erit vnaquaque parte circuli ipsi respondente. est autem recta AV æqualis euoluto arcui PV. ergo & tangens HV (arcûs nempe PV) maior erit rectâ AV. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

Si ducantur ad puncta A, V, rectæ FA, CV, æquales & æquidistantes inter se, & ad AB perpendiculares. etiámque à centro circuli C ducatur ad P terminum sinus OP in circumferentia, recta CP, quæ ad H terminum tangentis pertingat; secabit ipsa CP rectam FTA in puncto I quod inter rectam HAV, & arcum PV iacet.

DEMONSTRATIO.

LINEA enim AV minor est tangente HV, maior verò quàm PO sinus rectus; ergo rectæ FA pars TA iacet inter terminos H, P & neutrum attingit: productæque PO occurrit vltra P ad partes DH, atque etiam extra circulum. quare recta CP producta in H secabit rectam TA in I, quod inter PV arcum & HAV rectam iacet. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO V.

Si circulus super AB linea reuoluatur, & euoluatur ab A in B. ad hæc autem puncta ducantur perpendiculares FA, GB æquales circuli semidiametro, compleatúrque parallelogrammum, in quo ducta sit AG diagonalis. Statuatur circuli centrum in F, & linea FA principium euolutionis, tanget ipse circulus lineam AB in A. reuoluatur circulus & euoluatur, veniátque centrum in C, & semidiameter FA conueniat cum CP. Dico semidiametrum illam FA reuolutam non attingere diagonalem AG, in VDE semicirculo primo reuolutionis & euolutionis.

DEMONSTRATIO.

VENIT itaque centrum in C. producatur CP vsque ad tangentem HV. hæc * tangens demonstrata est maior arcu euoluto PV, ac proinde maior quam recta AV. secat etiam CP producta ad H rectam FA in puncto I, quod * iacet inter peripheriam & rectam HAV. sed CPH non attingit AV. quare

Prop. 3.

Prop. 4.

DEMONSTRATIO.

DVcatvr LM æquidiſtans AB, erit ipſa æqualis GK, & triangulum LMO rectum faciet ad M, in quo puncto circulum YM tanget. per hypotheſim itaque ſimiles ſunt arcus IK, VM. erit igitur, vt IK arcus ad arcum VM, ita tota peripheria circuli XIK ad totam peripheriam circuli YM. atque etiam ita erit ſemidiameter QK ad ſemidiametrum QM. ſed arcui IK æqualis eſt GK, ſeu LM & arcui VM æqualis eſt PZ. erit ab æquali LM ad PZ. ita QK ad QM. ſed parallelæ ſunt LM, PZ; erit igitur vt LM ad PZ ita OM ad OZ. ergo ab æquali vt QK ſemidiameter ad QM ſemidiametrum, ita OM ad OZ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

Iiſdem poſitis, dico OM eſſe ad MZ; vt tota peripheria circuli XIK, ad eam partem, qua circuli XIK peripheria tota excedit peripheriam totam circuli YM. ſeu ad differentiam peripheriarum vtriuſque circuli XIK, YM inter ſe.

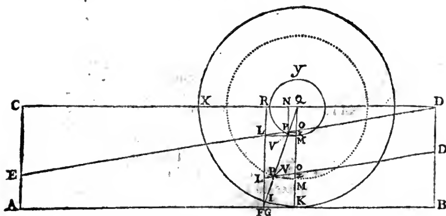
DEMONSTRATIO.

CVm enim ſit vt * OM ad OZ, ita QK ad QM. erit per conuerſionem rationis, vt OM ad MZ, ita QK ad KM. *Prop. 6.* vt autem QK, ad KM; ita tota peripheria circuli XIK, ad partem qua ſuperat ipſa totam peripheriam circuli YM: ergo ab æquali, vt OM, ad MZ; ita tota peripheria circuli XIK, ad partem qua ipſa excedit totam peripheriam circuli YM; ſeu ad differentiam peripheriarum vtriuſque circuli XIK, YM inter ſe. Quod erat demonſtrandum.

Hócque ſemper erit, quoniam in eadem ratione ſemper ſecabitur OM, manentibus ſimilibus reuolutionis arcubus.

PROPOSITIO VIII.

Iiſdem poſitis. dico MZ eſſe ad MQ; vt exceſſus arcus IK ſupra arcum VM eſt ad totam peripheriam circuli YM.



DEMONSTRATIO.

EST enim vt * OM ad MZ, ita LM ad RN. & permutando vt OM ad LM, ita MZ ad RN. & vt MZ ad RN, ita LR, id eſt QM, ad RD. itaque permutando. vt MZ ad MQ, ita RN ad RD. eſt autem RQ æqualis LM, quæ æqualis poſita eſt arcui IK; & NQ æqualis eſt PZ, quæ æqualis poſita eſt arcui VM. ergo RN æqualis eſt differentiæ arcuum IK, VM, eſt etiam RD æqualis peripheriæ circuli YM. ob euolutum circulum XIK ſuper AB, & ob æqualem RL ſemidiametro QM; quod infrà * demonſtrabitur. quare erit differentia, qua arcus IK excedit arcum VM ad totam peripheriam circuli YM, vt MZ ad MQ, id eſt vt RN ad RD. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 7. Prop. 18.

COROLLARIVM.

Ex illis colligitur etiam, differentiam arcuum IK, VM, nempe RN ſe habere ad ZM, vt ſe habet tota peripheria circuli YM ad radium QM.

Eſt enim vt RN ad RD, ita MZ ad MQ. & inuertendo, vt RD ad RN, ita MQ ad MZ. & permutando vt RD ad MQ ita RN ad MZ. atqui eſt RD æqualis peripheriæ circuli YM.

PROPOSITIO IX.

Iisdem positis. Dico sinum versum arcus V M circuli Y M, qui similis sit arcui IK circuli X I K, in principio quadrantis minorem esse quàm ZM. qua distantia est ab LM ordinata PZ sub angulo LOM, & posita æqualis arcui V Z.

DEMONSTRATIO.

EST enim in principio quadrantis * minor ac minor ratio sinus versi arcus I K ad semidiametrum K Q, quàm ratio arcus I K ad totam peripheriam X I K. vt autem arcus I K, ad totam peripheriam X I K, ita M O ad Q K, propter euolutionem circuli X I K. ab æquali itaque minor in infinitum erit ratio sinus versi arcus I K, ad semidiametrum Q K in principio reuolutionis quadrantis, quàm ratio M O ad Q K. & permutando, minor ac minor erit ratio sinus versi arcus I K ad M O, quàm ratio Q K ad Q K; id est quàm ratio æqualitatis. quare minor ac minor erit ratio sinus versi arcus IK ad MO ratione æqualitatis. atq; adeo quacumque data terminata ratione minor ac minor dabitur, quanto minus à principio quadrantis sinus versus distabit. ratio autem M Z ad M O terminata ostensa est vt KM ad KQ. dabitur ergo ratio sinus versi arcus IK ad MO minor, quam KM ad K Q, siue M Z ad M O; quia hæc vbique manet in eodem termino à ratione æqualitatis distans, cùm minor ac minor fiat ratio sinus versi arcus I K ad M O, quia ab æqualitatis ratione in infinitum recedit. In principio ergo quadrantis, cùm minor sit ratio sinus versi arcus I K ad M O, quàm ratio M Z ad eandem MO, erit sinus versus arcus IK minor quàm M Z. sed & arcuum circulorum minorum Y M minor est sinus versus, quàm arcuum similium in maioribus circulis; quare & sinus versi arcuum VM in circulis minoribus multo minores erunt recta MZ. Quod erat demonstrandum. Prop. 1.

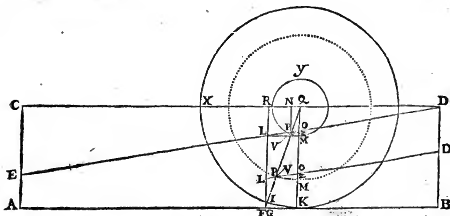
PROPOSITIO X.

Iisdem positis. Dico punctum V, quod est in peripheria circuli Y M,

infra diagonalem E D, euolutione facta à puncto L, per aliquod reuolutionis spatium consistere, in principio reuolutionis quadrantis.

DEMONSTRATIO.

QVONIAM minor est sinus versus arcus V M, quàm M Z, erit differentia M O & sinus versi maior quàm O Z. sed, vt linearum confusio vitetur, sit triangulum L O M simile triangulo L O M præcedentis figuræ; sitque M D sinus versus arcus V M minor quàm M Z, erit O D maior quàm O Z, sitque V D sinus rectus arcûs V M, qui minor demonstratus est quàm recta P Z, quæ æqualis est arcui V M. & producatur V D ad L O, fiátq; D F. Quoniam ergo parallelæ sunt P Z, D V F, L M erit vt O M ad L M, ita O Z ad Z P, & ita O D ad D F. sed maior est O D quàm O Z; ergo & D F maior est quàm Z P. ergo multo maior adhuc erit F D quàm D V. ergo punctum V non attingit rectam L O, sed infra ipsam situm est in principio quadrantis. Quod erat demonstrandum.



Quando verò sinus rectus arcus reuoluti se habebit ad Z O, vt tota peripheria Y M, ad semidiametrum Q M; tunc punctum V ad diagonalem redibit; in qua fuit, quando Q I F conueniebat cum R G.

COROLLARIVM.

Ex demonſtratis ſequitur, ſemidiametrum RL, dum XIK circulus euoluitur ab A in B, hoc eſt à ſiniſtris partibus ad dextras, poſt ſitum perpendicularem ad A B, ſeu parallelam LM, ſecare diagonalem LD in plaga à perpendiculari QM ſiniſtra ad partes R L F, cùm punctum V, qui terminus eſt rectæ Q V, infra diagonalem deſcendat. R L enim facta eſt Q V, euoluto circulo X I K ab R in Q, vbi perpendicularis eſt Q M.

PROPOSITIO XI.

Super linea AB, quæ producta verſus A æqualis fiat peripheriæ circuli KN, ipſe circulus euoluatur & reuoluatur. per A, B puncta ducantur GBD, FAC æquidiſtantes inter ſe, & ad AB perpendiculares. Semidiametro verò HM æquales fiant vtrinque AC, AF; BD, BG. compleatur parallelogrammum CD, FG, & à puncto B ducatur BE, quæ producta vltra E producta etiam GF, & æquali facta peripheriæ circuli KN occurrat. erit ipſa BE ſic producta diagonalis rectanguli ſub ſemidiametro & peripheria circuli NK. ſit principium euolutionis in linea DBG, & à B in A circulus euoluatur. Accipiatur punctum aliquod, vt I, quod non ſit in principio euolutionis, in eóque centrum circuli NK conſtituatur. per I ducatur IX ad FG perpendicularis, quæ ſecet diagonalem BE in Q, à puncto autem I centrum circuli NK veniat in H, & euoluatur arcus

MN super MZ ipsi æquali. ducatur etiam per H recta HT, quæ diagonalem secet in R. simul autem cum circulo NK reuoluatur & transferatur circulus maior LPT ipsi concentricus, cuius semidiameter HT æqualis sit IQ. huius maioris circuli arcus reuolutus sit TP similis arcui MN, ob reuolutionis æqualem angulum PHT. sit SO æqualis arcui TP, sub angulo SRO adaptata, & æquidistanter ad AB posita, faciátque triangulum SRO rectangulum ad S. in eodem triangulo adaptetur TQ æqualis MZ seu arcus MN, & æquidistans SO, quæque faciat triangulum QTR. Dico quòd linea TQ secat rectam SR in ratione tali, vt SR sit ad TR, sicut HT semidiameter circuli LPT, ad HM semidiametrum circuli KMN.

DEMONSTRATIO.

SIMILES sunt arcus MN, TP, quare erit, vt MN, ad TP; ita tota peripheria circuli NK, ad totam peripheriam circuli LPT. seu vt semidiameter HM ad semidiametrum HT. sed arcui MN æqualis est TQ, & arcui TP æqualis est SO. erit propterea, vt TQ, ad SO; ita HM ad HT. parallelæ autem sunt SO, TQ. erit itaque vt TQ, ad SO; ita TR, ad SR. ab æquali vt TR, ad SR; ita HM ad HT. & inuertendo, vt SR, ad TR; ita HT, ad HM. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Per conuersionem rationis, erit vt SR, ad ST; ita HT ad MT.

PROPOSITIO XII.

Iisdem positis. dico sinum versum arcûs TP circuli LPT, qui similis sit arcui MN circuli KβM. in principio quadrantis minorem esse, quàm ST, quæ est distantia à TQ ordinata SO sub angulo MRB, & posita æqualis arcui TP.

DEMONSTRATIO.

Prop. 1. EST enim in principio quadrantis * minor ac minor ratio sinus versi arcûs TP ad semidiametrum HT, quàm ratio arcûs TP. ad totam circuli LTP peripheriam. vt autem arcus

TP, ad totam peripheriam; ita SR ad HT, propter euolutionem. ab æquali itaque minor ac minor erit ratio ſinus verſi arcûs TP, ad ſemidiametrum HT, quàm SR ad HT. & permutando minor ac minor erit ratio ſinus verſi arcûs TP, ad SR; quàm HT ad HT; id eſt quàm ratio æqualitatis; atque adeo quacumque data terminata ratione, minor ac minor dabitur ratio ſinus verſi TP ad SR, quanto minus à principio quadrantis ſinus verſus diſtabit. ratio autem ST ad SR, per corollar. præc. prop. data eſt vt MT ad HT terminata. dabitur ergo ratio ſinus verſi arcûs TP ad SR minor, quàm MT ad HT. id eſt minor, quàm ST ad SR. quia hæc manet ſemper eadem. & in eodem termino ab æqualitatis ratione diſtat, etiam imminuta SR. minor autem ac minor fit ratio ſinus verſi arcûs TP ad SR, quia hæc ab æqualitatis ratione in infinitum recedit. In principio ergo quadrantis, cùm minor ſit ratio ſinus verſi arcûs TP ad SR, quàm ratio ST ad SR; erit ſinus verſus arcûs TP minor quàm ST. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Cùm ergo ſinus verſus in principio quadrantis minor ſit quàm TS, ſitque verbi gratia TV; huiuſque ad SR ratio continuè imminuatur, fiátque minor ac minor quàm ratio ST ad SR; conſequens eſt ſinum verſum in minori ad ST fore ratione quàm ſubdupla, ſubtripla aut ſequentibus.

PROPOSITIO XIII.

Iisdem positis. Dico punctum P, quod est in peripheria circuli maioris LPT, infra diagonalem EB, euolutione facta circuli K ß M à puncto Z in M, per aliquod reuolutionis spatium consistere in principio reuolutionis.

DEMONSTRATIO.

OSTENSVM est igitur, quòd sinus versus arcus TP in principio quadrantis, id est dum incipit reuolui punctum P, minor est recta TS. & ideo sinus rectus arcus T P iacebit inter SO, TQ. est autem in principio quadrantis minor ratio sinus versi VT ad TS, quàm subdupla aut subtripla per coroll. præc. prop. ratio verò sinus recti arcus TP, ad arcum TP, qui ipsi respondet, maior est in principio quadrantis quàm subdupla, & ad æqualitatem maximè accedit, vt in cyclometricis demonstratum est. Sit ergo in triangulo SRO, æquali & simili triangulo maioris figuræ, linea SO æqualis arcui TP. sinus verò arcus TP sit recta VP æquidistans SO. est itaque VP ad SO maior ac maior quàm subdupla. Sinus autem versus arcûs TP est VT, minor quàm in ratione subdupla ad TS; quoniam verò in triangulo SRO, vel TRQ, est vt TR, ad TQ; ita semidiameter ad totam peripheriam, in eadem proportione crescent TV, TS; ac ZI, XO. incrementum ergo rectæ VI, supra TQ, est ad incrementum SO; sicut TV, ad TS. sed sinus rectus arcus SO in maiori ratione creuit respectu SO; quàm TV ad TS. ergo in maiori ratione creuit sinus rectus quàm VI. quapropter & sinus rectus, nempe VP, maior est quàm VI. terminatur autem VI in diagonali RO. quare VP, quæ maior est quàm VI ipsam secabit; & punctum P infra eam erit. est autem punctum illud P in circumferentia circuli LPT, quare & infra diagonalem EROB in principio reuolutionis ab I in H per aliquod spatium punctum P consistet. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc etiam patet, quòd semidiameter HP tandiu secabit diagonalem EROB donec sinus rectus arcus TP fuerit ad SR; vt tota peripheria circuli, ad eiusdem semidiametrum.

COROL-

Corollarium II.

Semidiameter itaque H P, dum K β M, euoluitur à Z in M, hoc eſt à dextris partibus ad ſiniſtras, poſt ſitum perpendicularem ad A B, ſeu parallelam ipſi C D, ſecat diagonalem EB in plaga dextra à perpendiculari HT ad partes DBG.

Propositio XIV.

In circulo E Y K ſit deſcripta ſpiralis primæ circulationis A H F E, & à termino primæ circulationis E incipiat circulus reuolui & euolui ſuper linea E M, quæ ſit æqualis ipſius circumferentiæ E Y K. Dico ſpiralis ſeu helicis ſimul reuolutæ ac tranſlatæ punctum, quod in X O ſemidiametro ad E M perpendiculari reperitur, etiam in diagonali E Φ ſimul reperirì & eſſe.

Videatur figura paginæ 19.

DEMONSTRATIO.

EST enim propter spiralem, vt tota peripheria circuli EYK, ad arcum OSZ tres quadrantes; ita A E, ad X R. id est vt ΦX A, ad AE; ita Φ X ad X R tres quadrantes totius A E. erunt ergo A E, X R rectis Φ A, ΦX, id est M E, M O proportionales. & quia parallelæ sunt X R, A E, erunt etiam iisdem Φ E, Φ R proportionales, id est, vt Φ A ad Φ X, ita Φ E ad Φ R; & ita A E ad XR. Omnia ergo puncta spiralis, quæ in XO & aliis perpendicularibus erunt, cum diagonali E R Φ etiam conuenient, dum ipsa translata ab euoluto circulo reuoluetur. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Idem demonstrabitur in aliis circulationibus, producta diagonali Φ R E ad partes V θ ρ.

PROPOSITIO XV.

Euoluto circulo secundùm ordinem E Y K, & translata simul spirali in prima circulatione X R H, puncta quæ in ea sunt, vt Z, in semidiametro X Z P, post situm in linea perpendiculari H N, minus ab X R O, quæ deinceps perpendicularis facta est, distant, quàm puncta circuli euoluti vt P, quæ sunt in eadem semidiametro X Z P.

DEMONSTRATIO.

CVM enim ab X centro circuli O P ducta sit semidiameter XZP, in qua sunt Z punctum in spirali & P in circunferentia circuli; maiórque sit X P quàm XZ, erit etiam PD, deducta perpendicularis ad semidiametrum XO, maior in circulo PO; minor verò à Z puncto ad XR deducta perpendicularis. Cùm enim communis vtrique sit angulus PXO, erit vt XP ad XZ, ita PD ad eam, quæ à Z ad XO ducetur perpendicularis. propterea punctum Z propius est lineæ XO post situm perpendicularem in HN, quàm punctum alterum P. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Iisdem positis. Post situm puncti N in perpendiculari HN, & diagonali ΦRE euoluto circulo, & translato eius centro ab H in X, dum incipit punctum N ascendere versùs lineam AXΦ, simúlque transfertur in Z. Dico punctum N translatum in Z infra lineam ΦRE per aliquod euolutionis spatium consistere.

DEMONSTRATIO.

PONATVR enim centrum circuli euoluti in puncto H. & recta HN ad AΦ perpendicularis, & intercepta inter AΦ & diagonalem EΦ, quæ fiat semidiameter circuli minoris & concentrici; euoluatúrque circulus SζO ab H in X, & simul transferatur ac reuoluatur circulus minor concentricus; Ostensum * est, quòd semidiameter HN, post situm perpendicularem ad AΦ, fecet diagonalem EΦ per spatium aliquod reuolutionis. quare cùm euolutus erit circulus SZO ab H in X, & reuolutione facta congruet HN cum XZ, congruet etiam N punctum cum Z, eritque infra diagonalem EΦ. Quod erat demonstrandum. *Prop. 10.*

PROPOSITIO XVII.

Iisdem positis. Linea ΦRE, quæ hypotenusa est trianguli, cuius basis æqualis est peripheriæ circuli, & perpendiculum ΦM eius semidiametro, per totam circuli euolutionem secabit helicem seu spiralem XRHS, per totam huius reuolutionem primæ circulationis, in duobus punctis; quorum alterum erit in perpendiculari XR, aut aliis perpendicularibus; al-

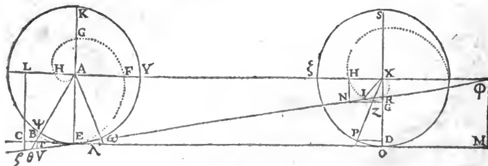
terum in semidiametro maiori ad partes antecedentes, seu secundùm seriem circulationis spiralis à centro circuli incipientis.

DEMONSTRATIO.

CVm enim puncta RZ sint in spirali, & ostensum sit punctum Z infra lineam NRΦ; positum esse, erit vna pars spiralis infra dictam lineam NRΦ; sed & alia pars est supra eandem, quoniam spiralis circulatio per totam circuli reuolutionem ducta est; ergo ΦRN secabit spiralem in duobus punctis; nempe in R puncto, quod in perpendiculari XO situm est; & in I, quod est in semidiametro XI maiore, quàm XR, ad partes antecedentes, seu secundùm seriem circulationis spiralis à centro circuli incipientis. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Cùm ergo ΦRE secet spiralem in R & I, sitque pars ipsius RZI infrà, reliqua supra eandem ΦRE, manifestum est, partem consequentem RX totam esse supra lineam diagonalem ΦRE per totam circuli euolutionem; sectorémque helicis IXR infra illam diagonalem existentem, in prima circuli euolutione, spiralísque prima circulatione, à perpendiculari XR versùs partes antecedentes vergere.



PROPOSITIO XVIII.

Facta euolutione circuli à termino primæ circulationis spiralis, secundùm seriem EOM, & lineis minoribus à centro circuli ad spiralem ductis in situm perpendicularem succedentibus, sinuum versorum, angulis æqua-

libus adsumptis respondentium, ratio ad O X continuè minuitur, & infra lineam ER Φ pars helicis magis descendit, vsque dum centrum circuli veniat in Φ, & semidiameter perpendicularis sit Φ M.

DEMONSTRATIO.

CVM enim sinus versi angulorum æqualium in circulis inæqualibus sint ad se inuicem, vt semidiametri eorumdem circulorum, minoribus diametris minores rectæ sinuum versorum respondebunt; eruntque in minori ratione ad OX, quàm maiores.

Altera quoque pars ita demonstrabitur. Quoniam semidiametris imminutis sinus versi ipsis respondentes imminuuntur, eleuatio puncti Z pariter imminuetur, quæ per sinus versos absoluitur; eritque minor ac multo minor quàm R G, imminuta continuo progressu ratione sinus versi ad R G, imminutisque sinibus rectis angulorum ZXR. ideo à diagonali magis recedet punctum Z. & longius infra ipsam reperietur. magis itaque ac magis sector spiralis infra ΦRE descendit, donec circuli centrum veniat in Φ, & semidiameter perpendicularis sit φ M. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex demonstratis constat, incipiente motu à puncto Φ, & facta circuli euolutione secundùm ordinem MOE, ob succedentes in situm perpendicularem maiores semidiametros, maiores etiam fore angulorum æqualium adsumptorum sinus versos; qui propterea in maiori ratione erunt ad XO. & eapropter magis magísque ascendet punctum Z sub æqualibus reuolutionis angulis. Sinus quoque recti eodem modo crescent, & ductæ à puncto Z ad RG perpendiculares maiores erunt: punctúmque Z ad lineam NH propius accedet: minórque pars sectoris spiralis infra diagonalem erit, donec circuli centrum veniat in E, sitque perpendicularis A E. in quo situ tota spiralis primæ circulationis supra lineam φ RE existit.

COROLLARIVM II.

Constat etiam facta euolutione à puncto φ ad A, punctum helicis I diagonalem priùs attingere in situ diametri XI ad Aφ obliquo, quàm in situ perpendiculari HN, in quo diagonalem ite-

rum attingit. Fit autem euolutio à φ ad A à dextris ad finistras, & tunc IXR sector spiralis à diagonali sectus vergit à perpendiculari XR ad partes finistras.

PROPOSITIO XIX.

Diagonalis ducta per primam euolutionem primi circuli, producta per secundam euolutionem eiusdem, secat spiralem secundæ circulationis, euoluto circulo NKM per secundam euolutionem.

DEMONSTRATIO.

SIT BOE diagonalis primæ euolutionis circuli primi NKM per secundam euolutionem BMA producta. pérque hanc secundam euolutionem BA reuoluatur circulus NKM. dico quòd diagonalis BOE secundæ circulationis spiralem secat. Cùm enim, vt suprà iam * ostensum est, sit BZ ad ZQ, vt tota periferia circuli KN ad semidiametrum HN, erit propterea in hac secunda circulatione & euolutione punctum Q in spirali, posito centro circulorum KMN, LCP in I. Sed euoluto circulo ab I in H, semidiameter IQ nempe HP * secat diagonalem BE; & punctum Q, id est P, infra ipsam reperitur. quare spiralis in pun-

Prop. 14. huius.

Prop. 15. & huius.

ctis duobus secabitur, quorum vnum erit in R ac perpendiculari HR; alterum verò ad partes βP. Quod erat demonstrandum.

Quando verò sinus rectus reuoluti arcus circuli LPV se habebit ad SR, vt tota peripheria ad semidiametrum, punctum Q ad diagonalem BE redibit.

COROLLARIVM I.

Hinc manifestum est, partes consequentes spiralis à puncto Q in diagonali posito versùs β omnes supra diagonalem E B esse.

COROLLARIVM II.

Manifestum est etiam, punctum spiralis Q, diagonalem priùs attingere in hac secunda euolutione, in situ ad A B perpendiculari semidiametri IQ, quàm in obliquo ad eandem AB, in quo diagonalem iterum attingit, facta euolutione à puncto Z ad M. túncque RHP sector spiralis, quem secat diagonalis BE, vergit à perpendiculari HR ad partes circulationis consequentes, seu dextras.

PROPOSITIO XX.

Reuoluto circulo SOζ à puncto φ ad A, hoc est, à dextris partibus ad sinistras, per primam euolutionem ME; & simul translata ac euoluta spirali primæ circulationis; deincépsque reuoluto SOζ circulo à linea A E ab iisdem dextris ad sinistras, hoc est, ab E in C, per secundam euolutionem, simúlque translata ac reuoluta spirali secundæ circulationis; sector spiralis à diagonali interceptus, respectu semidiametri spiralis, quæ ad MEC perpendicularis est, plagam permutat in puncto E, & linea A E; & à partibus sinistris in dexteras transit.

DEMONSTRATIO.

Videatur figura quæ est supr à pag. 20.

OSTENSVM est enim, per totam primam euolutionem circuli SOζ sectorem IXR spiralis primæ circulationis à diagonali interceptum, respectu semidiametri XR, quæ perpendicularis est ad ME, positum esse in partibus sinistris. Ostensum est etiam, per totam secundam euolutionem circuli eiusdem, hoc est, à linea AE versùs LC & deinceps, sectorem spiralis secundæ circulationis à diagonali interceptum, respectu semidiametri eiusdem

ſpiralis, quæ ſemidiameter ad MEC ſit perpendicularis, in partibus dextris poſitum eſſe. Quare ſector ſpiralis à diagonali interceptus, reſpectu ſemidiametri ſpiralis, quæ ad MEC eſt perpendicularis, plagam permutat in puncto E, & à partibus ſiniſtris in dextras tranſit. Quod erat demonſtrandum.

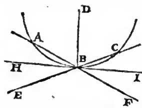
PROPOSITIO XXI.

Si linea qualibet curua à recta ita ſecetur, vt reſpectu alicuius & lineæ poſitione datæ, & puncti poſitione dati, ſectionis ſitus ab vna plaga in aliam, hoc eſt, à dextra in ſiniſtram, vel viciſſim permutetur, vel ambarum vel alterutrius motu. Illæ lineæ, curua ſcilicet & recta, in illo puncto ſe contingent, qui lineæ rectæ poſitione datæ terminus in curua erit; ad quam comparatur ſectionum ſitus ab vna plaga in aliam tranſitum faciens. Ita vt in dato illo puncto terminentur vnius plagæ ſectiones, ab eáque alterius plagæ ſectiones incipiant.

DEMONSTRATIO.

CASVS I.

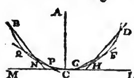
SIT data curua linea ABC, & data poſitione recta linea DB. & punctum poſitione datum B, in occurſu rectæ & curuæ lineæ. ſecta ſit curua in punctis AB ad partes H reſpectu lineæ DB, & puncti B. deinde vel motu curuæ ſolius, aut rectæ ſecantis vel ambarum; ſectio AB, quæ erat in partibus AE, tranſeat in partes CF relatione facta ad lineam DB & punctum B. ſitque B terminus ſectionum ab vtraque parte. Dico, quòd recta linea ABF curuam ABC continget in puncto poſitione dato B, quod eſt in termino rectæ DB quæ diuidit plagas; quando nimirum ab HE plaga in plagam IF ſectionum ſitus permutabitur. Ducatur recta HBI contingens curuam in B. manifeſtum eſt omnes rectas lineas, quæ per punctum B lineam HBI ſecabunt, angulóſque ABH acutos facient, ſecturas eſſe ABC curuam in plaga DBH. & quo acutiores facti erunt anguli, tanto minorem fore ſectionem AB. dum AF reuoluetur circa B. Ad terminum itaque ſectionum plagæ AE tunc perue-



perueniet AF, quando cum tangente HI conuenerit; & motu continuato supra HI eleuari incipiens in plaga CF, faciet angulos CBI acutos, & sectionum situm permutabit. Oportet itaque lineam AF (cuius motus sectionum plagam ad DB comparatam mutat) per lineam contingentem HI transiisse, & cum ea conuenisse, atque adeo curuam tetigisse, vt mutatio plagæ sectionum fieret. Quod demonstrandum proponebatur.

CASVS ALTER.

Sit curua linea BCD, quam secet recta linea BN, dum verò hæc mouetur pergendo ad punctum C, & à curua linea nunquam separata, sectiones semper efficiat minores, vt QP in plaga BM ad AC rectam pergendo. ita vt cùm attigerit punctum C, & lineam AC quæ plagas diuidunt; indéque moueri cùm perrexerit, sectiones vt GF in plagam DL transferat. Dico lineam illam rectam BN, curuam BCD contingere, quando ipsa punctum C & lineam AC attigerit. Cùm enim BN mota ita secet curuam BCD in plaga BM, vt minores successiuè euadant, ac tandem desinant in ea sectiones; quando attigerit punctum C, quod disterminat plagas. ab isto verò mota puncto transferat sectiones in alteram plagam: tunc conuersionem situs sectionum in puncto C factam esse oportuit; quoniam terminus est communis desinentium sectionum in plaga BM, & incipientium in plaga DL. quare linea BN in illo puncto in neutra parte sectionem faciet. aliàs enim in termino plagarum non esset punctum C. quod est contra hypothesim. Linea itaque BN sic mota, vt superiùs positum, lineam curuam BCD continget in C puncto plagas disterminante; ad quod, lineámque AC referuntur sectionum plagæ. Quod demonstrandum proponebatur.

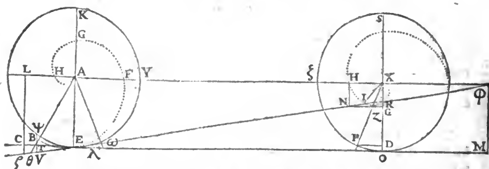


PROPOSITIO XXII.

His demonstratis. Dico lineam ΦEV spiralem in puncto E contingere.

DEMONSTRATIO.

OSTENSA est IZR pars spiralis à diagonali ΦEV secta, in tota prima circuli euolutione ME in partibus sinistris, à se-



midiametro, quæ ad ME perpendicularis est, RX, & puncto spiralis R, quod in diagonali ΦE iacet, versùs HN, consistere. per totam verò euolutionem circuli secundam, pars illa secta à diagonali, ostensa est in partibus dextris consistere; à semidiametro nempe LCρ. quæ ad MEC est perpendicularis, & à puncto spiralis ρ in diagonali iacente ad partes AE vergere. Deincépsque ostendimus, sectionum illarum plagas & situs, respectu semidiametrorum illarum perpendicularium, & punctorum spiralis in diagonali existentium, permutari in linea KAE & puncto E, qui terminus est communis primæ ac secundæ circuli euolutionum; & transire ipsas sectiones à sinistris partibus in dextras. quare ex demonstratis in duobus antecedentis propositionis casibus linea ΦE spiralem in puncto E continget; in quo puncto conuersio fit plagarum sectionum à diagonali factarum. Quod erat demonstrandum.

Corollarivm.

Itaque si ab E termino primæ circulationis spiralis absolutæ ad A circuli centrum ducatur EA, & ad EA excitetur perpendicularis AΦ, ducatúrque tangens spiralem in E, quæ AΦ occurrat in Φ. constat, quòd AΦ, intercepta inter centrum circuli & occursum contingentis, æqualis est peripheriæ circuli KYE.

PROPOSITIO XXIII.

Sit circulus ABC, in quo sector accipiatur FDE, cuius arcui subtensa ducatur DE. ad punctum D ducatur tangens circulum, quam producta FE attingat in G. à quolibet etiam puncto rectæ DE ad DG tangentem du-

catur qualibet perpendicularis IH; à centro verò F ad IH recta ducatur FZK, quæ sectoris arcum secet in O; & rectam DE in Z; & rectam IH in puncto T iacente inter arcum DE & tangentem DG. Dico IT maiorem esse quàm ZT.

DEMONSTRATIO.

Vel enim angulus TZI rectus est, vel obtusus, vel acutus. Sit ergo primum rectus TZI, quando FK bisecabit DE, maior tunc erit TI quàm TZ; cùm TI tunc opponatur recto; TZ autem acuto. Sed quando FK secabit DE, ita vt DZ minor sit quàm ZE, erit angulus FZD, seu illi oppositus TZI obtusus, quare & TI huic opposita maior erit quàm TZ opposita acuto.

Sit randem secta DE, vt maior sit DZ quàm ZE; erit FZE obtusus, & TZI, seu FZD qui deinceps acutus. at exterior FZD semper erit maior interiore FED, seu FDE; cui æqualis TIZ, ob parallelas FD, HI. quare FZD, seu TZI semper maior erit, quàm ZIT. quare & hoc tertio casu maior erit TI quàm TZ. Quare vbicumque ponatur TI, semper erit maior, & TZ minor. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quia verò punctum T iacet inter arcum DOE & tangentem DG per hypothesim, secabit arcus rectam TZ in puncto O, quare & TZ maior erit quàm OZ. atque adeo multo maior TI quàm OZ.

PROPOSITIO. XXIV.

Iisdem positis, si à puncto O intersectionis arcus DE, & secantis FTK, accipiatur OL æqualis IH. Dico punctum L, inter centrum F & subtensam DE positum esse.

DEMONSTRATIO.

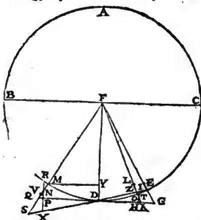
CVM enim sit demonstrata TI maior quàm TZ; atque TZ maior quàm OZ; multo quoque maior demonstrata est TI, quàm OZ. Sed HI maior est quàm TI, cùm punctum T iaceat inter H & I. ergo & multo maior adhuc erit HI quàm OZ. Sed OL æqualis posita est HI. ergo & OL multo maior est quàm OZ: quare & punctum L vltra subrensam DE versùs centrum F situm est. ergo inrer centrum F & ipsam DE positum est. Quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO XXV.

Si producatur ED in S, cadet DS extra circulum. producatur tangens GD in Q. & à centro F ducatur FMS. quæ rectam XP, ad tangentem perpendicularem, & ad circulum productam, secet in N puncto, quod iacet inter DQ tangentem, & arcum DM. Dico minorem esse XP, quàm MS.

DEMONSTRATIO.

QVONIAM igitur XP ducta est à rectâ SD, ad tangentem perpendicularis, & producta est ad circumferentiam circuli, quem attingit in puncto R. atque etiam secta est in puncto N, quod iacet inter terminos QM, erit XN maior quàm XP. angulus FDE acutus est: ergo qui deinceps FDS est obtusus. & ob parallelas FD, NX, angulus NXS æqualis est angulo FDS, atque etiam obtusus; quare maior erit NS, quàm NX; sed SM maior est quàm NS. ergo & multo maior erit MS, quàm NX. Sed NX maior est quàm PX, quare & longè adhuc maior erit MS, quàm PX. atque adeo PX minor erit quàm MS. Quod erat demonstrandum.

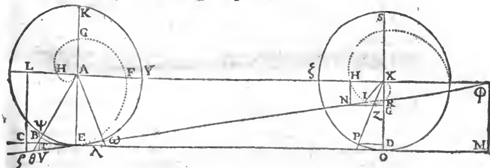


COROLLARIVM.

Hinc ſequitur, ſi in MS à puncto M, accipiatur aliqua recta M V æqualis PX, terminum illius acceptæ V non attingere rectam SD, & propterea ſitum eſſe inter puncta MS.

PROPOSITIO XXVI.

Sit recta EM æqualis peripheriæ circuli KET, cuius diameter KE ſit ad angulos rectos poſita ſuper recta EM; centrúmque ipſius ſit A. ab altero termino rectæ EM ducatur perpendicularis MΦ, æqualis ſemidiametro EA; & compleatur parallelogrammum MEAΦ. ducatúrque diagonalis EΦ. intra circulum autem deſcribatur ſpiralis primæ circulationis AHGFE, cuius terminus ſit E, & in ſecundam circulationem continuetur EB. Dico diagonalem EΦ ſpiralem contingere in puncto E.



DEMONSTRATIO.

QVIA per hypotheſim AE normalis eſt ad CEM. éſtque punctum E terminus ſemidiametri, tanget CEM circulum KEY in E. & à puncto E ducta eſt diagonalis ΦE, quæ angulum AEΦ minorem recto facit; quare ΦE ſecabit circulum in ω puncto. ducatur à centro A ſemidiameter Aω, factus erit ſector EAω. propter ſpiralem autem, ſe habet tota circumferentia, ad ſemidiametrum; vt pars circumferentiæ, ad ſemidiametri partem analogam. id eſt vt recta EM toti peripheriæ æqualis, ad ſemidiametrum AE, ſeu ipſi æqualem perpendicularem ΦM; ita pars rectæ EM, veluti EΛ æqualis parti peripheriæ datæ, ad perpendicularem, quæ à diago-

nali Eφ ad punctum λ ducetur. Sit sector AEω figuræ LKφME, ad maiorem demonstrationis facilitatem, seorsim descriptus in hac secunda figura, inque eo accipiatur à puncto E rectæ Eλ arcus EO æqualis. & à diagonali Eφ, eiúsque puncto I ducatur ad λ punctum perpendicularis Iλ. deinde à centro A ducatur ad O terminum arcus EO, qui æqualis positus est rectæ Eλ, semidiameter AO, quæ ad tangentem EM producatur, secabit ista AO perpendicularem Iλ, quæ à diagonali φE ad λ punctum ducta est, in puncto T iacente inter tangentem CEM & circuli EOω circumferentiam, vt suprà demonstratum est. quare per ea quæ demonstrata quoque sunt propositionib. 23 & 24. quæ ab O puncto intersectionis circumferentiæ EOω & semidiametri AO (quæ producta ad tangentem EM secat perpendicularem Iλ) accipietur in ipsa AO recta OL æqualis perpendiculari Iλ, maior erit quàm OZ, pars eiusdem semidiametri intercepta inter arcum EOω & ipsi subtensam Eω. secabit ergo OZ subtensam Eω, illiúsque terminus L iacebit inter subtensam & centrum A. & vbicumque accipietur semidiameter pertingens ad arcum sectoris EAω secans subtensam Eω, idem demonstratum est, quare omnia puncta illa inter subtensam Eω (quæ pars est diagonalis) & centrum A iacebunt, nec eam subtensam attingent.

Sed factum est vt tota EM ad Mφ in prima figura, id est, vt tota circumferentia ad semidiametrum, ita Eλ ad Iλ ob parallelas Iλ, φM. & rectæ Eλ positus est æqualis arcus EO. rectæ verò Iλ posita est æqualis OL, quare punctum L est in spirali. adeóque omnia puncta similiter accepta in spirali erunt, nec attingent subtensam Eω.

Producta sit diagonalis ΦE in θ. & arcui Eψ ponatur æqualis ET. & à centro A ducatur Aψ semidiameter, producatúrque ad Eθ & in puncto θ terminetur. item ad T excitetur perpendicularis GTV, quam secabit Aθ in S puncto iacente inter GE circuli circumferentiam, & tangentem EC. ponatur deinde in Aθ à puncto ψ, quod est in peripheria, recta ψB æqualis rectæ TV. per ea quæ demonstrata sunt propositione 25. ψB æqualis TV minor est, quàm ψθ. est autem punctum B in spirali secundæ circulationis. quia est vt tota peripheria, ad semidiametrum Aψ; ita tota peripheria vnà cum arcu Eψ simul, ad totam semidiametrum Aψ vnà cum parte ψB simul. id est, vt ME, ad AE; ita MEET simul sumptæ, ad AE, TV simul sumptas. Idémque in omnibus aliis punctis demonstrabitur. Erunt ergo omnia puncta spiralis secundæ circulationis, in illo situ, inter arcum circuli primi, & diagonalem productam ΦEθ. nullúmque ipsorum eam attinget.

Est autem punctum E terminus primæ circulationis & initium secundæ in spirali, ipsúmque in communi intersectione diagonalis φEθ, & tangentis CEM situm est, quare in eadem diagonali erit. In eo igitur vno puncto diagonalis attingit spiralem: quare in eo ipsam tanget. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVII.

Si linea recta spiralem in prima circulatione tangat, & à principio circulationis ad contactum ducatur recta linea; angulus quem faciet cum tangente, ad partes antecedentes obtusus erit, ad consequentes verò acutus.

Hæc propositio sequitur ex antecedentibus. est enim in antecedenti figura angulus contactus AEθ obtusus, AEΦ acutus per structuram. alio tamen medio hoc demonstrabitur.

DEMONSTRATIO.

SIT spiralis in prima circulatione DCBA, cuius principium D describatur circulus IBE, cuius semidiameter minor sit DA semidiametro circuli primi, sitque DB. propter lineam ergo spiralem partes circuli BI antecedentes intra circulationem spiralis erunt. partes verò sequentes BE extra ipsam; minores siquidem

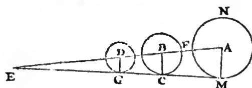
sunt in his spiralis semidiametri; in illis maiores semidiametro circuli IBE. secabit itaque circulus spiralem, sectionis communis punctum sit B. facient itaque circulus & spiralis angulum curuilineum IBC ad partes concauas; & oppositum GBH ad conuexas. tangat linea LK circulum & spiralem. cùm ergo G B H sit angulus in communi puncto intersectionis; & extra circulum sint partes spiralis antecedentes, intra verò sequentes, recta LK, neque cum BG, neque cum BH lineis curuis conueniet. neque etiam cum B communi puncto intersectionis, tunc enim eas secaret, quas ex hypothesi solùm tangit, angulo ergo GBH recta LK subtenditur. sed & tangit circulum & spiralem, in punctis videlicet H, G. ad hæc itaque puncta ducantur DH, DG. erit angulus DHK rectus, quoniam ad contactus punctum à centro circuli ducta est DH, & qui deinceps GHD rectus etiam erit. spiralem autem tangit LK in puncto G ad quod ducta est DG. angulus ergo LGD exterior, maior est recto GHD & interiore, & qui deinceps HGD minor recto erit. Quare angulus LGD ad partes antecedentes obtusus erit. KGD verò ad sequentes acutus. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Si circulum MFN recta tangat linea EM, quæ sit eius circumferentiæ æqualis, & à centro circuli ad ipsam ducta sit perpendicularis AM; itémque ab eodem centro A ad terminum E ducta sit AE, quæ intra triangulum AEM ducentur ad EM perpendiculares à linea AE, & parallelæ rectæ AM, nempe BC, DG; quæ semidiametri fiant circulorum BD; erunt singulorum circumferentiæ æquales tangentibus singulis CE, GE inter perpendicularem & lineæ terminum comprehensis. id est, peripheria circuli BC æqualis est tangenti CE. & circumferentia GD æqualis est tangenti GE.

DEMONSTRATIO.

EST enim vt AM semidiameter ad ME tangentem, ita BC semidiameter ad CE tangentem. sed est ME æqualis circuli MN



MN circumferentiæ, ergo CE æqualis est circuli CB circumferentiæ; & sic deinceps GE æqualis erit peripheriæ circuli DG.

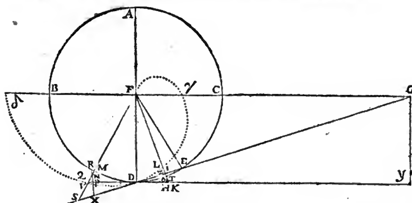
Ioh. Baptista Torricellus Geometra subtilissimus hoc demonstrauit.

PROPOSITIO XXIX.

Sit in recta QDy pars accepta Dy æqualis arcui ACD circuli ABDC. cuius centrum sit F; & sit diameter AD ad Dy perpendicularis, adeo vt QDy circulum tangat in D. ab y puncto erigatur yG parallela AD, & æqualis FD; compleatúrque parallelogrammum DFGy. ducatur etiam diagonalis GD; intra circulum autem, posita AF principio circulationis, describatur spiralis Fγ LD, quæ respondeat arcui adsumpto ACD & continuetur DVδ. Dico diagonalem GD spiralem contingere in puncto D.

DEMONSTRATIO.

QVONIAM angulus FDy rectus est, & circulum tangit Qy in D, ducta diagonalis GD circulum secabit in E & D. & ducta à centro semidiametro FE factus erit sector DFE. propter spiralem autem se habet arcus ACD, ad FD; vt pars arcus ACD, ad partem semidiametro FD analogam; veluti, ducta perpendiculari IH, vt Dy, ad yG; ita DH æqualis arcui DO, ad IH perpendicularem ad Dy & parallelam ad Gy. à centro F ducatur ad O terminum arcus adsumpti semidiameter FO, quæ ad tangentem Dy producatur in K. hæc secabit perpendicularem IH in puncto T, quod iacet inter peripheriam DOE & tangentem Dy, vt suprà demonstratum est. quapropter per ea, quæ etiam demonstrata sunt propositionibus 23. & 24. quæ ab O puncto intersectionis circumferentiæ & semidiametri FK productæ ad K, & secantis IH in puncto T, in ea ipsa accipietur OL æqualis perpendiculari IH maior erit quàm OZ, quæ est intercepta pars eiusdem semidiametri FO inter arcum DOE, & subtensam DE. istiúsque acceptæ OL terminus L iacebit inter subtensam DE & cen-



trum F. propter æquales autem positos arcum DO, & rectam D H, punctum L est in spirali. & vbicumque punctum O accipietur & semidiameter FO, idem demonstrabitur; quare omnia puncta illa spiralis inter subtensam DE, quæ pars est diagonalis, & centrum F iacebunt, nec eam subtensam attingent.

Quoniam verò producta est diagonalis in S, per ea quæ demonstrata sunt prop. 25. MV æqualis PX, quæ à producta ED perpendicularis ducta est ad tangentem Qy, minor est quàm MS. est autem punctum V in spirali continuata; quia est vt arcus ACD ad FD, id est, vt GF, ad FD; ita hi arcus simul ACD, DM, id est, GF, DP simul, ad FD, PX simul; siue FM, MV. Idémque in omnibus aliis punctis demonstrabitur. erunt ergo omnia puncta spiralis continuatæ à D per V & δ inter arcum DRB, & EDS. quare nullum ipsorum diagonalem attinget. Est autem punctum D in spirali, ipsúmque in communi intersectione diagonalis GD & tangentis Dy situm est, quare in ipsa diagonali erit. In eo igitur vno puncto diagonalis GDS attingit spiralem, ideóque in illo ipsam tangit. Quod erat demonstrandum.

Idem demonstrare licet euoluto circulo per lineam yQ. diagonalis enim GD, ab y in D euolutione facta, spiralem secat in plaga sinistra à perpendiculari. circulo deinde euoluto à D versùs Q, secat diagonalis spiralem in plaga dextra à perpendiculari. ideo facta conuersione plagarum in puncto D, tangit diagonalis DGS spiralem in dicto puncto D.

Corollarium I.

In prima igitur circulatione, si ad punctum aliquod vt D, qui terminus non sit primæ circulationis, ducatur D G tangens, ac deinde DF, quæ tactum, & principium spiralis iungat. & à puncto F ducatur FG ad DF perpendicularis, quæ occurret tangenti D G, * quia angulus FDG est acutus; erit FG intercepta inter F principium spiralis & G occursum tangentis & rectæ FG, æqualis circuli, qui per tactum transit, peripheriæ parti, interceptæ inter semidiametrum AF, quæ principium est circulationis, & FD, quæ tactum & principium spiralis iungit, secundùm partes antecedentes DCA. *per 17. huius.*

Corollarium II.

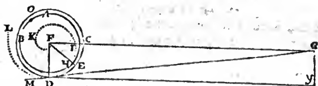
Constat etiam, mensuram anguli FDG, nempe FG, æqualem esse arcui ACD super y D euoluto, si euolui supponatur. cui euolutioni respondet circulatio similis ACD, ídque erit vbique. & quot erunt primi circuli euolutiones, tot erunt circulationes circuli per contactum transeuntis; atque mensura anguli FDG tot partibus circulationis, vel tot circulationibus integris, seu peripheriis circuli per tactum transeuntis constabit, quot primi circuli euolutiones fuerint. numero quippe æquales sunt, & eiusdem semper ad se inuicem rationis.

Propositio XXX.

Eadem erit demonstratio in circulationibus sequentibus. Si enim in secunda circulatione accipiatur punctum D, qui terminus illius non sit, & per D describatur circulus EDOC. deinde ad DF erigatur perpendicularis FG, æqualis toti circumferentiæ circuli EDC (quæ respondet toti primæ circuli primi ABH circulationi) eiúsque parti ED (quæ parti simili respondet secundæ primi circuli circulationis) simul sumptis. recta verò FG ducatur Dy parallela, quæ circulum tangat in D. & compleatur rectangulum FGyD, agatúrque diagonalis GD. intra circulum autem ABH primum, descripta sit spiralis FKIH, cuius circulationis principium est semidiameter FE, continuetúrque per secundam circulationem HDL. Dico diagonalem GD spiralem contingere in puncto D.

DEMONSTRATIO.

PEr ea enim quæ demonstrata sunt; rectæ, quæ à circuli DEC circumferentia in semidiametris accipientur æquales



perpendicularibus à diagonali GD in Dy demiſſis (quæ perpendiculares eandem rationem ſeruent ad FD, quam diſtantia ipſarum à D ad totam Dy; ſeu eandem, quàm ſemidiametrorum, in quibus accipiuntur, diſtantia à ſemidiametro FD, ad hæc ſimul totam peripheriam EDOC, & arcum ED) ſecabunt ſubtenſam ſectoris, quem efficit DG ſecans circulum DOC. omnéſque termini illarum acceptarum in ſemidiametris à circumferentia circuli ſunt in ſpirali, quare omnia puncta ſpiralis HD, dempto D ſunt extra lineam DG. continuata etiam cùm fuerit G in M. & ſpiralis HD in DL; oſtenſa ſunt omnia puncta ſpiralis DL, dempto D, eſſe extra lineam MD. quare linea diagonalis GD ſpiralem contingit in D. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

In ſecunda igitur circulatione, & aliis ſequentibus; ſi ad punctum aliquod, vt D, qui terminus non ſit ſecundæ circulationis, vel ſequentis, ducatur DG tangens; agatúrque DF, quæ tactum & principium ſpiralis iungat. deinde à puncto F ducatur FG ad DF perpendicularis, quæ versùs partes ſequentes ſpiralis occurret tangenti DG. erit FG (intercepta inter F principium ſpiralis, & G occurſum tangentis & rectæ FG) æqualis his ſimul ſumptis toti peripheriæ EDOC & arcui ED.

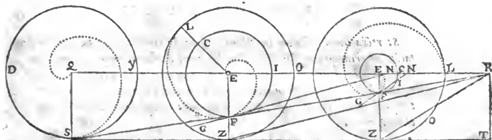
COROLLARIVM II.

Hinc etiam ſequitur, ſi ad terminum ſecundæ circulationis tangens ducatur, & à tactu ad principium ſpiralis recta ducatur; à qua & ſpiralis principio educatur perpendicularis, quæ tangenti occurret; fore interceptam inter principium ſpiralis & occurſum tangentis duplam peripheriæ circuli ſecundi. Quod etiam aliter demonſtrabimus.

PROPOSITIO XXXI.

Si ſuper linea ST euoluatur & reuoluatur circulus primus DSy, ſecum

deferens spiralem primæ circulationis, cuius circuli centrum super linea QR feratur; ad punctum autem spiralis F, quod in perpendiculari EF Z ad ST, inque diagonali RS situm est, ducatur tangens FN, abscindet rectam EN, quæ in continua proportione erit rectarum QR, ER.



DEMONSTRATIO.

DESCRIBATVR circulus DSy centro facto in E, ducatúrque semidiameter EFZ. describatur deinde circulus per punctum F. * ostensa est EN æqualis arcui CIF, à semid. E CL, quæ principium est circulationis, & ab EF semid. quæ tactum & principium spiralis iungit, comprehenso. est autem arcus CIF similis arcui LOZ, id est, residuo euolutionis, dum fieri intelligitur ab S in T. quapropter erit, vt EF semidiameter, ad arcum CIF; ita EZ semidiameter, ad arcum LOZ. sed propter euolutionem æqualis est ZT arcui LOZ. quapropter erit etiam, vt semidiameter EF ad EN; ita semidiameter EZ, ad ER, seu ipsi æqualem ZT. & permutando, vt EF, ad EZ; ita EN, ad ER seu ZT. & inuertendo, vt EZ, ad EF, ita ER ad EN. vt autem EZ, id est, QS, ad EF, ita QR ad ER. ab æquali erit, vt QR ad ER, ita ER ad EN. quaproter EN in continua proportione erit rectarum QR, ER. Quod erat demonstrandum. *Corol. 1. 29.*

COROLLARIVM.

Si itaque à puncto Z termino semidiametri, in quo circulus primus tangit rectam ST, ad punctum R (terminum motus centri, cùm euolutio procedet ab S in T; aut principium motus centri, si procedat euolutio à T in S.) recta ducatur ZR, æquidistabit tangenti GFN. demonstratum est enim, vt EF ad EN, ita EZ ad ER, & vbicumque erit tangens GFN, semper æquidistabit

rectæ ZR. Idémque in sequentibus spiralis circulationibus primísque circuli euolutionibus eueniet; quoniam ZT & EN similibus arcubus, paríque numero peripheriarum, si integræ sint, æquales sunt.

PROPOSITIO XXXII.

Si recta linea spiralem in termino secundæ circulationis tangat, & à tactu ad principium spiralis recta ducatur; atque etiam ad principium spiralis recta agatur, quæ ad iungentem principium & tactum sit perpendicularis, quæque producta tangenti productæ occurrat; intercepta inter principium spiralis, & occursum tangentis dupla erit circumferentiæ circuli secundi.

N P I O K L B D H G F E A C M

DEMONSTRATIO.

SIT BD circulus primæ circulationis spiralis, qui per CD rectam in prima circulatione euoluatur secundùm seriem CED, & per DK in secunda circulatione euoluatur. centrum verò feratur secundùm seriem AGBI. à puncto K, qui terminus est semidiametri IK, in quo circulus PK tangit rectam KC, ducatur KA diagonalis rectanguli AIKC. sit autem POL spiralis secundæ circulationis, eiúsque terminus L. per quod punctum describatur circulus secundus NL. & ad punctum L ducta sit tangens spiralem LM. per ea quæ in antecedenti proposit. demonstrata sunt, æquidistabunt inter se KA, LM. quapropter erit, vt KI, ad IA; ita LI, ad IM. est autem IA dupla ad BA; ergo IA dupla erit peripheriæ circuli BD; atque ideo æqualis erit peripheriæ circuli NL, quæ dupla est peripheriæ circuli BD. sed IL dupla est rectæ IK, propter spiralem. Ergo & tota IM dupla erit rectæ IA, quæ peripheriæ circuli NL æqualis est. erit itaque IM etiam dupla totius peripheriæ circuli NL. Quod erat demonstrandum.

In tertia verò circulatione, demonſtrabitur IM tripla peripheriæ circuli tertij NL. tunc etenim parallelæ quoque erunt KA, LM. eritque ſemidiameter LI tripla ſemidiametri IK; quare erit IM tangens tripla ad IA. ſed IA, hoc eſt, tripla euolutio circuli BD, erit æqualis peripheriæ circuli tertij NL. ergo & IM tripla erit peripheriæ circuli tertij NL. In quarta verò circulatione IM erit quadrupla peripheriæ circuli quarti. in quinta, quintupla circuli quinti. & ſic deinceps.

Corollarium I.

Sequitur ex demonſtratis, quòd in continua proportione ſunt intercepta IM. tota peripheria circuli datæ circulationis, & circuli primi peripheria. eſt enim MI, ad AI, ſeu peripheriam circuli NL; ita IL, ad IK. vt autem IL ad IK; ita tota peripheria circuli NL ad totam peripheriam BD. ab æquali erit, vt MI, ad totam peripheriam NL; ita tota peripheria NL circuli datæ circulationis, ad totam peripheriam circuli primi PK.

Corollarium II.

Ex illis etiam ſequitur, circulorum ordine ſumptorum peripherias ſeſe æqualiter ſuperare in progreſſione arithmetica, eſſeque inter ſe vt latera. menſuras verò angulorum contactus, eſſe inter ſeſe, vt illorum laterum quadrata.

	1					1		1			1
	2					2		2			4
	3					3		3			9
Semidiametri circulorum.	4	Vt	Circulus primus 1.	Ad	Peripherias circulorum.	4	Ita Peripheriæ circulorum.	4	Ad	Menſuras angulorum contactus.	16
	5					5		5			25
	6					6		6			36
	7					7		7			49

Corollarium III.

Ex illis etiam colligimus, menſuras angulorum contactuum in eadem eſſe inter ſe ratione, ac quadrata ſemidiametrorum circulorum, qui per contactuum puncta tranſeunt.

Hactenus directè oſtendimus omnia, quæ Archimedes deducendo ad impoſſibile demonſtrauit de ſpiralem lineam tangentibus, earúmque proprietatibus. Superest vt de ſpatiis à lineis ſpiralibus contentis inquiramus, & media inueniamus, quibus ad directam demonſtrationem illa

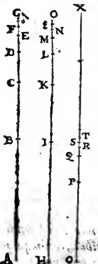
theoremata reducantur. Per inscripta polygona tam circulo quàm spirali res est procul dubio perficienda, & per comparationem ipsorum inter se polygonorum duplo laterum numero auctorum. quam rationem enim inter se tenebunt polygona & eorum incrementa, eandem inter se spatia tenebunt; sique polygonorum proportio mutetur, ratio mutatæ proportionis apparebit.

PROPOSITIO XXXIII.

Additione infinita partium continuè proportionalium submultiplicium alicuius magnitudinis, efficitur magnitudo, quæ propiùs ac propiùs accedit in infinitum, vel ad ipsam magnitudinem primo positam, vel partem ipsius, quæ denominatorem habet vnitate minorem proportione, sub qua fit partium additio.

DEMONSTRATIO.

SIT linea AG, quæ in partes proportionales continuas in ratione subdupla diuidatur, nempe in AB, BC, CD, DE, EF, F♪. eadémque proportione diuisa intelligatur residua ♪G; eæque partes simul addantur, sintque HI, IK, KL, LM, MN, Nε; & sit HE æqualis A♪. Dico, quòd omnes illæ partes continuè proportionales, quanto plures accipientur, simul additæ magis ac magis accedent ad totam magnitudinem AG; quæ denominatorem habet vnitate minorem, denominatore proportionis partium continuè proportionalium.



Cùm itaque AG in subdupla ratione secta sit, & residuum etiam in subdupla, erunt omnes partes ad inuicem duplæ. partium autem prima & antecedens est AB, eaque sequentis BC dupla; & sic deinceps in infinitum; vnaquæque antecedentium dupla est consequentis. illa autem partium diuisio in infinitum procedit, residua enim semper est ♪G æqualis proximè antecedenti F♪, nunquam itaque ex earum additione, duplæ antecedentes totam magnitudinem AG æquare poterunt, quia complementum ♪G semper superest. ex cuius ♪G diuisione in eadem propor-

proportione, residuum seu complementum minus ac minus euadit, ergo Hι minus ac minus differt ab AG, & ad ipsius æqualitatem magis ac magis accedit, distátque ab ea vna parte æquali vltimæ ex diuisione ortæ. est autem AG tota magnitudo proposita, quæ vna est vnitas, seu totum vnum, & $\frac{1}{1}$. proportio verò est subdupla, seu $\frac{1}{2}$. ergo magnitudo, ad quam accedit effecta ex additione partium, denominatorem habet vnitate minorem denominatore proportionis, sub qua facta est partium additio. Quod erat ostendendum.
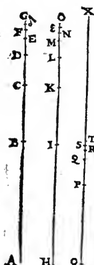
Sit verò additio partium proportionalium subtripla; vt in linea OX sint OP, PQ, QR, RS. ostendere oportet OS ex partibus prædictis constantem, accedere magis ac magis ad OT semissem totius OX.

Quoniam OP est triens totius OX, si PT semis trientis OP ipsi addatur, erit OT semis totius OX; & PT triens erit totius OT. sed & PQ triens est antecedentis OP. erit ergo, vt OT ad TP; ita OP, ad PQ. & permutando vt OT ad OP, ita TP ad PQ; & conuertendo, vt OP ad OT; ita PQ, ad TP. sed OP ad OT est vt 2 ad 3. ergo PQ ad TP erit vt 2 ad 3. erit ergo TQ. 1. PQ. 2. atque adeo PQ dupla ad TQ. similiter & QR triens antecedentis QP, dupla erit ad RT; & RS, ad ST dupla erit. & sic deinceps. Omnes itaque partes in proportione subtripla simul additæ, à semisse totius deficiunt vltimæ partis additæ dimidio. quare, quo plures in continua serie subtriplæ partes accipientur, eo minor vltima erit in additione; minor propterea eius semis, quo deficiunt omnes subtriplæ partes additæ à semisse totius. Magis igitur ac magis hæ subtriplæ partes ad semissem totius accedunt, qui semis denominatorem habet $\frac{1}{2}$ vnitate minorem denominatore proportionis subtriplæ, qui est $\frac{1}{3}$, sub qua partium fit additio. Quod fuerat demonstrandum. In aliis proportionibus submultiplis idem ostendetur.

EXEMPLVM IN NVMERIS.

Sit linea AG, quæ in partes proportionales continuas in ratione subdupla diuidatur nempe in AB $\frac{1}{2}$, BC $\frac{1}{4}$, CD $\frac{1}{8}$, DE $\frac{1}{16}$, EF $\frac{1}{32}$, FD $\frac{1}{64}$. Dico ex partibus illis proportionalibus simul additis effici aliam magnitudinem Hι, quæ propiùs ac propiùs in infinitum accedit ad ipsam magnitudinem AG.

Positis enim HI, IK, KL, LM, MN, Nι æqualibus præ-



dictis AB, BC & residuis, accipiantur tres HI, IK, KL, hoc est $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$ efficitur magnitudo HL $\frac{7}{8}$ deficítque à tota AG vna octaua, nempe DG. accipiantur deinde quatuor HI, IK, KL, LM. hoc est, $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ ex his partibus facta erit HM $\frac{15}{16}$ deficítque ab AG vna decima sexta, nempe EG. Quòd si quinque accipiantur, erit facta HN ex partibus prædictis & superaddita MN $\frac{1}{32}$. erítque HN $\frac{31}{32}$, deficiétque à tota AG vna trigesima secunda parte, nempe FG. Quòd si adsumatur cum prædictis partibus N ε $\frac{1}{64}$ erit tota H ε $\frac{63}{64}$. Quare cùm HL sit $\frac{7}{8}$, HM $\frac{15}{16}$, HN $\frac{31}{32}$, H ε $\frac{63}{64}$, magis accedit H ε ad totam AG, quàm HN. & HN magis, quàm HM, & sic deinceps. Additio autem facta est partium continuè proportionalium in proportione subdupla. & illæ additæ ad vnitatem integram accedunt magis ac magis, seu ad vnum totum integrum. ergo ex illarum partium in proportione 1 ad 2. additione componitur magnitudo, quæ ad $\frac{1}{1}$ accedit magis ac magis; & denominatorem vnitate minorem habet, proportionis 1. ad 2. denominatore.

Sit verò additio partium continuè proportionalium in ratione subtripla. Sítque OX vnitas, & OP triens illius, PQ $\frac{1}{9}$, QR $\frac{1}{27}$, RS $\frac{1}{81}$. accipiantur OP, PQ $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{9}$ erit OQ $\frac{4}{9}$. deinde accipiantur OP, PQ, QR, hoc est, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$ erit OR $\frac{13}{27}$. Tertiò adsumantur OP, PQ, QR, RS $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{27}$ $\frac{1}{81}$. erit OS $\frac{40}{81}$. accedunt ergo partes in continua proportione subtripla simul additæ ad semissem; & quo plures addentur, magis accedent. propiùs enim ad semissem accedunt $\frac{40}{81}$, quàm $\frac{13}{27}$, & hi quoque magis quàm $\frac{4}{9}$. Cùm itaque partes illæ in subtripla proportione ad semissem accedant seu $\frac{1}{2}$ erit illa pars totius denominatorem habens vnitate minorem denominatore proportionis subtriplæ.

Porro si partes illæ in subquadrupla proportione accipiantur, magis ac magis ad trientem totius accedet magnitudo composita. & in subquintupla accedet ad quadrantem vnius totius integri.

Corollarium.

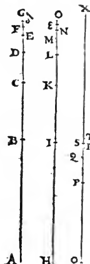
Ex demonſtratis etiam conſtat; In illis progreſſionibus magnitudinum continuè proportionalium ſubmultiplarum, partem reſiduam ad complementum magnitudinis illius, ad quam accedit magnitudo ex illis compoſita; vel æqualem eſſe vltimæ progreſſionis, vel ipſius partem eſſe eiuſdem denominationis, ac magnitudo, ad cuius æqualitatem in infinitum accedunt omnes progreſſionis magnitudines ſimul ſumptæ. In ſubdupla enim complementum δG ad totam AG oſtenſum eſt æquale vltimæ magnitudini progreſſionis Fδ. In ſubtripla, ST complementum ad ſemiſſem OT oſtenſum ſubduplum ad RS. erit itaque ST pars vltimæ RS eiuſdem denominationis, id eſt, $\frac{1}{2}$ ac OT, ad quam in infinitum accedunt omnes progreſſionis magnitudines, pars eſt totius OX, nempe $\frac{1}{2}$. In ſubquadrupla progreſſione, complementum ad trientem erit triens vltimæ progreſſionis, quia omnes ſubquadruplæ ad trientem accedunt. eritque ſemper; vt complementum, ad vltimam progreſſionis magnitudinem, ita magnitudo (ad cuius æqualitatem accedunt omnes progreſſionis magnitudines) ad integram magnitudinem, quæ rationem vnius totius habet.

PROPOSITIO XXXIV.

Si magnitudines quotlibet continuè proportionales in ratione ſubmultipla addantur, & cæteræ quæ in progreſſu infinito eiuſdem rationis accipi poſſunt, eis adiiciantur; ſimul ſumptæ æquales ſunt magnitudini, cuius denominator vnitate minor eſt, quàm denominator rationis, ſub qua continua fit progreſſio.

DEMONSTRATIO.

SInt continuè proportionales AB, BC, CD, DE, EF, Fδ, in ratione ſubdupla, quæ ſimul additæ faciant Aδ; oſtenſum eſt illa additione continua magnitudinem Aδ propiùs ac propiùs in infinitum accedere ad magnitudinem AG, quæ dupla eſt ad AB. Huius verò Aδ complementum ad AG, eſt magnitudo δG æqualis proximè antecedenti Fδ. quæ δG cùm in infinitum diuidi poſſit, ſecundùm eandem ſeriem progreſſionis ſubduplæ, con-



tinet omnes illas magnitudines illius progresſionis, quæ adiectæ omnibus AF ſimul efficiunt magnitudinem AG. quæ dupla eſt ad AB. eſt autem AB $\frac{1}{2}$, ergo AG erit $\frac{1}{1}$ ſeu vnum integrum, cuius denominator vnitate minor eſt, quàm denominator $\frac{1}{2}$. Quod erat demonſtrandum.

Sint verò continuè proportionales in ratione ſubtripla OP, PQ, QR, RS, quæ ſimul additæ faciunt OS. oſtenſum eſt illa additione continua magnitudinem OS propiùs ac propiùs in infinitum accedere ad magnitudinem OT, quæ ſemiſſis eſt XO, cuius triens eſt OP prima continuè proportionalium in ratione ſubtripla. Illius verò OS complementum ad OT eſt magnitudo ST æqualis ſemiſſi antecedentis SR, vt oſtendimus, quæ ST cùm in infinitum diuidi poſſit ſecundùm eandem ſeriem progreſſionis ſubtriplæ, continet omnes illas magnitudines quæ adiectæ omnibus OS ſimul efficiunt magnitudinem OT; eſt autem OT totius OX ſemiſſis ſeu $\frac{1}{2}$ cuius denominator vnitate minor eſt denominatore $\frac{1}{3}$ rationis ſubtriplæ in qua OP eſt ad OX. Quod erat demonſtrandum.

In aliis ſubmultiplis idem demonſtrabitur; nempe omnes magnitudines, quarum prima erit $\frac{1}{4}$, & ſequentes in ſubquadrupla proportione continua, efficere magnitudinem, quæ ſit $\frac{1}{3}$ cuius denominator vnitate minor eſt, quàm denominator $\frac{1}{4}$ ſeu vnius quadrantis.

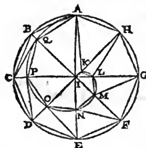
PROPOSITIO XXXV.

Si per ſpiralis primæ circulationis terminum circulus tranſeat, cuius centrum idem erit cum principio ſpiralis; & illi circulo polygonum æquilaterum quodlibet inſcribatur laterum numero, qui ſit in ſerie progreſſionis duplæ à binario incipientis: totidem verò laterum figura, ſub iiſdem ad centrum angulis ſpirali inſcribatur. differentia polygoni circulo inſcripti, & figuræ ſpirali inſcriptæ, conſtabit triangulorum numero, qui vnitate minor erit, quàm laterum polygoni duplicatus numerus. & erit

polygonum ad figuram, vt numerus ad numerum; atque adeo differentia amborum ad vtrumque, erit etiam vt numerus ad numerum.

DEMONSTRATIO.

SIT spiralis primæ circulationis I K L N P A, per cuius terminum A transeat circulus ACEG, cuius centrum erit punctum I. quod idem est principium spiralis. Circulo inscribatur æquilaterum octogonum; cuius laterum numerus est in serie progressionis duplæ à binario incipientis; nempe ABCDEFGH. totidem verò laterum figura sub iisdem ad centrum angulis spirali inscribatur, nempe AQPONMLKI. Dico quòd polygoni circulo inscripti & figuræ spirali inscriptæ differentia constat triangulis quindecim; qui numerus vnitate minor est quàm sexdecim, qui duplus est numeri laterum octogoni.



Quando enim ducentur rectæ lineæ à punctis QPONMLK, quæ sunt in angulis figuræ polygonæ spirali inscriptæ, ad puncta C D E F G H A, quæ sunt in angulis octogoni circulo inscripti, erunt effecta in septem sectoribus singulis duo triangula; nempe in BIC triangula BCQ, CQP, in sectore CID, facta erunt CDP, DPC & sic deinceps. in septem itaque sectoribus BIC, CID, &c. quorum vltimus est HIA, facta erunt triangula quatuordecim; quibus cùm additum fuerit triangulum BAQ, factum in sectore A IB, erunt quindecim triangula inter vtramque figuram polygonam comprehensa; inter ambitum scilicet interiorem octogoni, & ambitum exteriorem figuræ spirali inscriptæ. quare illa quindecim triangula continebunt spatium, quo minor, spirali scilicet inscripta figura, differt à maiori, ab octogono circulo inscripto; numerus autem duplus octogoni est sexdecim; quare numerus triangulorum, quo figuræ inter se differunt nempe 15. vnitate minor est. Quod erat demonstrandum.

Est etiam polygonum octogonum ad figuram totidem laterum, vt numerus ad numerum. Cùm enim æqualiter sese superent latera IK, IL, IM, IN, IO, IP, IQ, IA, & excessus singu-

latum æqualis sit minimæ magnitudini IK; erunt latera inter se in serie continua, vt numeri ab vnitate in continua progressione arithmetica accepti, & vnitate sese superantes. erunt ergo latera inter se, vt numerus ad numerum. quare ratio IB ad BQ, CP & alia, data erit vt numerus ad numerum. igitur & ratio trianguli BAI ad QAB data erit: & propterea etiam eiusdem BAI ad QAI; quia sub eadem sunt altitudine, & sic deinceps. quare omnia triangula octogoni, ad omnia triangula figuræ spirali inscriptæ, erunt vt numerus ad numerum. Quare & totum polygonum octogonum erit ad figuram totidem laterum spirali inscriptam, vt numerus ad numerum. Quod erat demonstrandum.

Demonstrabitur similiter, quòd differentia vtriusque sit ad vtrumque, vt numerus ad numerum. sunt enim triangula BAQ, BCQ CDP, ad triangula BCI, CDI; vt numerus ad numerum. ablatisque BCQ, CDP de BCI, CDI; residua triangula CQI, DPI sunt ad triangula CQP, DPO; vt CP ad CI; & DO ad DI, id est, vt numerus ad numerum. quare omnia triangula, quibus constat differentia octogoni & figuræ inscriptæ, est ad hanc & illud, vt numerus ad numerum. Quod erat demonstrandum.

Corollarivm I.

Tetragonum itaque cùm circulo inscriptum fuerit, & totidem laterum figuræ spirali, septem triangulis inter se polygonum & inscripta figura differunt, qui numerus vnitate minor est, quàm duplum numeri laterum tetragoni. Octogonum quando inscriptum fuerit, differentiam constare 15. triangulis ostendimus. Si verò inscriptum fuerit heccædecagonum, differentia polygoni & figuræ spirali inscriptæ constabit triangulis 31. numero vnitate minori quàm 32. qui duplus est numeri heccædecagoni, & sic deinceps.

Corollarivm II.

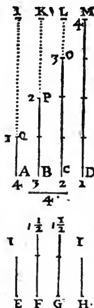
Crescente numero laterum polygonorum in circulo iuxta progressionem duplam, quæ fit in serie à binario incipiente; numerus triangulorum differentiæ polygoni in circulo, & figuræ in spirali; secundùm numerum, qui progressione dupla vnitate maior est, crescit. in quadrilatero enim differentia constat septem triangulis; in octogono quindecim: in heccædecagono vno & triginta; in qua serie consequens duplum est antecedentis, vnitatémque insuper addit.

In ſequentibus pariter circulationibus idem demonſtrabitur.

PROPOSITIO XXXVI.

Si alicuius magnitudinis partes, in progreſſione arithmetica (cuius progreſſionis terminorum numerus à quaternario incipiat, & progrediendo duplicetur) ita accipiantur; vt prima ac minima æqualis ſit exceſſus. ex illis autem partibus totius, partes eiuſdem denominationis ac numerus terminorum progreſſionis, facto à maxima initio, accipiantur, quæ arithmetica etiam progreſſione creſcant. Summa magnitudinum progreſſionis, dempta maxima, ſimúlque ex his omnibus acceptarum partium (quæ eiuſdem ſunt denominationis, ac numerus terminorum progreſſionis, quæque arithmetica proportione creſcunt) maior erit beſſe, ſiue duobus trientibus magnitudinis compoſita ex quatuor magnitudini diuiſa ſingulis æqualibus. & trientes duos excedit illa ſumma vna quadrageſima octaua parte ſummæ quatuor magnitudinum; ſeu triente vnitatis vnius.

DEMONSTRATIO.



SIT DM magnitudo diuiſa ſecundùm progreſſionem arithmeticam, cuius terminorum numerus à quaternario incipiat: id eſt, in partes quatuor diuiſa ſit DM. & AQ prima ac minima pars, idémque exceſſus ſit vnitas. ſecunda BP ſit 2. tertia CO ſit 3. quarta ſit DM 4. ex illis verò partibus, eiuſdem denominationis partes, ac numerus quaternarius terminorum (qui quatuor ſunt in progreſſione) id eſt, denominationis quadrantis, incipiendo à DM maxima, accipiantur; quæ ſimili progreſſione arithmetica creſcant. accipiatur nempe ex maxima magnitudine DM quadrans vnus, videlicet HI ex CO duo quadrantes, nimirum G, ex BP $\frac{3}{4}$. nempe F, ex AI $\frac{4}{4}$. ſcilicet E. Dico, quòd ſumma horum ſimul AQ, BP, CO, DM, dempta DM ſeu trium AQ, BP, CO, & quatuor H, G, F, E. ex quatuor prioribus acceptarum, ſecundùm progreſſionem ſimilem arith-

meticam vnius quadrantis, maior est trientibus duobus seu besse summæ quatuor AI, BK, CL, DM; quæ totidem numero sunt ac termini progressionis, & singulæ æquales sunt magnitudini diuisæ DM.

Cùm enim AP, BQ, CO simul sumptæ æquales sint semissi trium AI, BK, CL, quando ipsis addentur quadrans vnus ex DM. hoc est H, & quadrantes quatuor ex AQ, hoc est E, qui sunt primus & vltimus progressionis arithmeticæ quadrantes; erunt hæc simul AQ. BP, CO, vnà cum H, & E æquales duabus CL, BK. residuæ igitur magnitudines sunt G, quæ est $\frac{3}{4}$ magnitudinis CO. & F quæ est $\frac{3}{4}$ magnitudinis BP. Cùm autem CO æqualis sit $\frac{1}{2}$ totius CL erit ipsa G totius CL $\frac{3}{8}$ tres octauæ partes. Est verò BP semis magnitudinis BK. erit ergo F totius BK $\frac{3}{8}$. Itaque existentibus G, F, simul tribus octauis simul sumptarum BK, CL erunt ipsæ GF maiores triente simul sumptarum BK, CL. maiores enim sunt $\frac{3}{8}$ vno triente. triens autem BK, CL, sextans est quatuor magnitudinum AI, BK, CL, DM. qui additus duabus DM, CL, duos trientes efficit quatuor AI, BK &c. simul sumptarum. tres verò octauæ partes, id est GN, FR additæ duabus AI, BK totum efficiunt maius duobus trientibus quatuor AI, BK simul sumptarum. erunt ergo AQ, BP. CO, & E, F, G, H simul sumptæ, maiores trientibus duobus, seu besse quatuor magnitudinum AI, BK &c. simul sumptarum. Quod demonstrare oportuit.

Quoniam verò totarum CL, BK partes G, F sunt $\frac{3}{8}$, si ab eis duarum CL, BK $\frac{1}{3}$ auferatur, residua erit vna vigesima quarta pars duarum CL, BK. id est vna quadragesima octaua $\frac{1}{48}$. quatuor DM, CL, BK, AI simul sumptarum; quæ $\frac{1}{48}$ est excessus simul sumptarum AQ, BP, CO, E, F, G, H, supra duos trientes quatuor magnitudinum AI, BK, CL, DM. Summa autem harum est 16 vnitatum. ergo excessus ille triens est vnitatis vnius.

COROLLARIVM I.

Cùm itaque summa harum simul AQ, BP, CO, E, F, G, H, excedat duos trientes summæ simul sumptarum quatuor AI, BK, CL, DM, triente vnitatis vnius. erit differentia inter vtramque summam, triente summæ simul sumptarum quatuor minor, vnitatis vnius triente.

EXEMPLVM

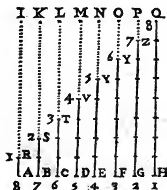
EXEMPLVM IN NVMERIS.

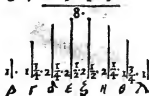
Summa quatuor AI, BK, CL, DM, 16. bes ſeu duo trientes $10\frac{2}{3}$ ſumma, dempta maxima, 6.

AQ.	BP,	CO.	DM.
1.	2.	3.	4.
E	F	G	H
$\frac{4}{4}$	$\frac{3}{4}$.	$\frac{2}{4}$.	$\frac{1}{4}$.
valent			
1.	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	1.

Summa 5. ergo AQ, BP, CO, DM, E, F, G, H eſt 11. maior $10\frac{2}{3}$ (qui numerus eſt bes numeri 16) vnitatis vnius triente. Differentia verò 11. & 16. eſt 5. qui numerus triente numeri 16. nempe $5\frac{1}{3}$ minor vnitatis vnius triente.

Secta verò ſit magnitudo QH, æqualis DM in partes octo. eiúſque prima & minima pars, idémque exceſſus, ſit vnitas AR. ſecunda BS 2. tertia CT 3. & ſic deinceps. vltima verò QH 8. ex illis verò partibus eiuſdem denominationis partes, ac numerus octonarius terminorum præſtructæ progreſſionis, id eſt denominationis octantis, incipiendo à QH maxima, accipiantur, quæ ſimili progreſſione arithmetica creſcant; nempe ex magnitudine QH $\frac{1}{8}$. ex magnitudine GZ $\frac{2}{8}$. ex FY $\frac{3}{8}$. ex EX $\frac{4}{8}$. ex DV $\frac{5}{8}$ ex CT $\frac{6}{8}$. ex BS $\frac{7}{8}$. ex AR $\frac{8}{8}$. ſintque hæ magnitudines λ, θ, η, ζ, ε, δ, ſ, β, quæ ſingulæ reſpondent ſingulis ex quibus accipiuntur; nempe λ prima primæ HQ; ſecunda θ ſecundæ GZ, & ſic deinceps. Dico, quòd ſumma horum ſimul, AR, BS, CT, DV, EX, Fy, GZ, HQ, dempta maxima HQ, & λ θ η ζ ε δ ſ β, maior eſt trientibus duobus ſeu beſſe ſummæ octo magnitudinum AI, BK, CL, &c. quæ ſingulæ æquales ſunt maximæ QH, & totidem ſunt numero, quot termini progreſſionis. Cùm enim ſimul ſumptæ ſeptem AR, BS, CT, DV, EX, FY, GZ





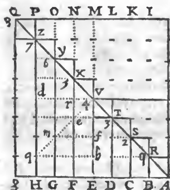
ob progressionem æquales sint tribus GP, FO, EN & semissi DM simul sumptis, quando ipsis addentur θ, η, hoc est octantes duo magnitudinis ZG, tréſque octantes magnitudinis FY; erunt simul sumptæ hæ septem AR, BS, CT, &c. & θ η æquales quatuor GP, FO, EN, DM. ambæ enim θ η æquales sunt semissi QH. residuæ verò magnitudines β γ δ ε ζ λ sunt totidem totius QH $\frac{4}{32}$ $\frac{7}{32}$ $\frac{9}{32}$ $\frac{10}{32}$ $\frac{10}{32}$ $\frac{4}{32}$. summa quorum est $\frac{44}{32}$ hoc est vnà QH & $\frac{12}{32}$ seu ad minimos numeros reducta fractione $\frac{3}{8}$. erunt ergo simul septem AR, BS, CT, &c. & octo β γ δ ε, &c. æquales quinque HQ, PG, FO, EN, DM cum tribus octauis CL, duo verò trientes octo HQ æquales sunt quinque HQ, PG, &c. vnà cum triente CL; quare omnes illæ septem AR, BS, CT, &c. & octo β γ δ ε simul sumptæ maiores sunt trientibus duobus octo HQ. Quod erat demonstrandum.

Excessus verò est æqualis excessui trium octauarum suprà trientem, hoc est, vni vigesimæ quartæ parti totius HQ; id est, trienti vnitatis vnius, cùm HQ diuisa sit in octo partes. & eapropter differentia summarum septem AR, BS, CT, &c. & octo β γ δ ε, &c. simul sumptarum; & octo AI, BK minor erit triente AI, BK, &c. vnitatis vnius triente.

PROPOSITIO XXXVII.

Vniuersaliter autem demonstrare oportet sic semper se habere in similibus progressionibus.

SIT quadratum AV, 16. cuius latus EV 4. termini quatuor progressionis arithmeticæ sint AR, BS, CT, DV, in numeris verò 1, 2, 3, 4. Summa trium rectangulorum AR, BS, CT est 6. accipiantur partes, vt antea imperatum, nempe ex DV vna quarta pars; ex CT verò duæ quartæ; ex BS tres quartæ partes; tandem ex AB quatuor partes quartæ, seu vnitas integra. erunt 1, 1 $\frac{1}{2}$, 1 $\frac{1}{2}$, & 1. quorum summa est 5 simul iuncti itaque trium AR, BS, CT numerus 6. & 5. partium acceptarum numerus, summam efficient 11. quæ ostensa est excedere quadrati AV duos trientes 10 $\frac{2}{3}$, quantitate trientis vnitatis vnius. differentia verò quadrati & summæ 11. nempe 5. minor est ostensa triente quadrati AV, quantitate trientis vnitatis vnius.



Duplicato latere fit QA quadratum 64. cuius latus QG est 8. Termini progressionis octo sint AR, BS, CT, DV, EX, Fy, GZ & HQ nempe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Summa verò septem AR, BS, CT, DV, EX, Fy, GZ nempe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, est 28. octo verò prædictorum rectangulorum partes acceptæ, initio facto à maxima HQ, sunt ex HQ vna octaua, ex GZ duæ octauæ; ex Fy tres octauæ; ex EX quatuor octauæ; ex DV quinque; ex CT sex; ex BS septem; ex AR octo octauæ seu vna vnitas. erunt itaque iuxta prædictum ordinem partes 1, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$, 1. quorum summa est 15. quæ iuncta summæ septem triangulorum 28, efficit summam 43, quæ ostensa est excedere duos quadrati QA trientes $42\frac{2}{3}$. quantitate trientis vnitatis vnius.

Quoniam autem numerus 4 lateris EV primi quadrati in prima progressione, subduplus est lateris gQ8 secundi quadrati in secunda progressione erit AQ quadratum ad AV quadratum quadruplum. Quoniam igitur tota quadruplicantur, & partes quæ ad illa eandem rationem tenent, quadruplicabuntur. prioris itaque progressionis partes ex rectangulis A, R, S, T, D, C, B, sunt 6. quatuor verò rectangulorum A, R, S, T, V, E, A, partes acceptæ sunt 5. illarum ergo quadruplum est 24. harum 20. quarum summa 44. maior est vnitate, quàm summa 43 suprà à nobis reperta; minor deinde est numerus quadruplus trium rectangulorum, nempe 24. quàm 28. qui ex rectangulis septem collectus est; maior verò est numerus 20, quadruplus acceptarum partium ex quatuor rectangulis in primo quadrato, quàm 15; qui colligitur acceptarum partium ex octo rectangulis. quare demonstrare oportet, quomodo quadruplices primi accepti aucti vel imminuti æquales sint numeris repertis in secunda progressione & secundo quadrato.

In quadrato itaque AV tria sunt rectangula AR, BS, CT, quorum summa, pars vna est summæ ad totum quadratum AV com-

paratæ. In quadrato autem AQ, quod eſt quadruplum quadrati AV, habemus ſeptem rectangula AR, BS, CT, DV, EX, Fy, GZ, in quibus quater comprehenduntur illa tria AR, BS, CT, nempe hæc ipſa; deinde *ef*, *mb*, *q* E. tertiò V*e*, *rm*, *dq*. & tandem VX, *ry*, *d* Z. quæ duodecim rectangula, quorum ſumma eſt 24. minora ſunt quàm ſeptem ſupradicta, quæ 28 efficiunt. ab híſque deficiunt toto rectangulo VD, qui terminus maximus eſt progreſſionis in quadrato AV. Quadruplum ergo trium AR, BS, CT rectangulorum adſumit rectangulum VD, vt efficiat ſeptem rectangula AR, BS, CT, DV, EX, Fy, GZ.

Cùm itaque addatur rectangulum illud DV quadruplo trium rectangulorum AR, BS, CT, vt efficiantur prædicta ſeptem; ſummæ quadrupli partium in rectangulis quatuor acceptarum detrahitur; quoniam per vtriuſque quadruplum ſumma in ſequenti progreſſione ad totum AQ quadratum comparanda efficitur: cúmque in illo rectangulo DV contineatur pars vna illarum acceptarum in quatuor rectangulis AR, BS, CT, DV, nempe vnitas TV, illi ſummæ quadrupli partium in quatuor rectangulis acceptarum detrahitur. totum itaque auferendum conſtat rectangulis DV, TV.

Quapropter in his progreſſionibus à quaternario terminorum numero incipientibus, deincépſque duplicato terminorum numero creſcentibus; In ſequenti progreſſione, generatur ſumma numeri rectangulorum progreſſionis dempto maximo, ex quadruplo numeri rectangulorum, dempto maximo, antecedentis progreſſionis, & hocce maximo ſimul ſumptis. Partium verò acceptarum in rectangulis omnibus numerus in ſequenti progreſſione generatur, ex quadruplo partium ſimiliter acceptarum in rectangulis omnibus antecedentis progreſſionis, demptis ex hocce quadruplo, maximo huius antecedentis rectangulo, & in eo comprehenſa vnitate, quæ pars eſt vna in ipſo acceptarum.

EXEMPLVM IN NVMERIS.

In prima progreſſione quadrati AV 16. tria rectangula 6. partes in quatuor acceptæ rectangulis 5. quadruplum trium rectangul. 24. cui additum maximum rectangul. 4. datur ſumma 28. quæ eadem ac ſeptem rectangulorum in ſecunda progreſſione & AQ quadrato. Quadruplum partium acceptarum 20. à quo detractis VD rectangulo maximo 4. & vnitate ſeu rectangulo

TV quæ pars in VD est accepta, summa residua est 15. æqualis summæ partium in octo rectangulis progressionis secundæ & quadrato AQ acceptarum. Pariter quadratum sequens est 256. cuius quindecim rectangula sic generantur.

Quadruplum septem rectangulor. antecedentis progressionis in quadrato AQ est quadruplum summæ 28 nempe 112. cui additum cùm fuerit HQ8, rectangulor. maximum progressionis in AQ, summa erit 120, æqualis summæ terminorum quindecim progressionis in quadrato 256. quadruplum verò summæ partium acceptarum in septem rectangulis, quæ est 15, erit 60; à qua summa cùm detracta fuerint rectangula HQ8. & ZQ1. residua erit 51. quæ æqualis est aggregato omnium partium in sexdecim rectangulis quadrati 256 acceptarum. vbique igitur eadem seruatur proportio summæ comparatæ ad totum quadratum, quæ in prima omnium reperitur, vt superet scilicet duos trientes quadrati, quantitate trientis vnitatis vnius.

Corollarium.

Cùm ergo summa rectangulorum, & partium in iis acceptarum, ad quadratum comparata superet duos quadrati trientes vnitatis vnius triente, minor ac minor euadit excessus ille in ratione subquadrupla. est enim in quadrato AV triens vnitatis vna quadragesima octaua pars totius. in quadrato verò AQ, triens vnitatis est vna centesima nonagesima secunda pars totius. In quadrato 256. triens vnitatis est vna septingentesima sexagesima octaua pars totius. maior autem est $\frac{1}{48}$, quàm $\frac{1}{192}$ & hæc quàm $\frac{1}{768}$. Crescentibus enim in ratione quadrupla quadratis, vnitas in subquadrupla ratione ad totum comparata minuitur.

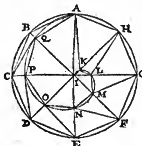
Cúmque differentia summæ rectangulorum & partium simul cum illis sumptarum, totiúsque quadrati minor sit triente huius, vnitatis vnius triente, cresœt hæc differentia ad totum comparata eadem magnitudine ac minuetur summa rectangulorum & partium in iis acceptarum.

PROPOSITIO XXXVIII.

Spatium lineæ spirali in prima circulatione descripta, & recta linea prima in principio circulationis contentum, tertia pars est circuli primi.

DEMONSTRATIO.

SIT prima ſpiralis circulatio ILNAP. circulus primus ACEG. linea prima in principio circulationis AI. contentum ſub ſpirali, & illa linea erit ILNPAI. Dico ſpatium illud tertiam partem eſſe circuli ACEG.



Inſcribatur circulo octogonum æquilaterum ductis ſubtenſis AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HA. & diametri ducantur AE, BF, CG, DH, ſecabunt itaque ſpiralem in punctis Q, P, O, N, M, L, K. & præterea per E, A, principij & termini tranſibit prima earum. ducantur etiam ſubtenſæ in helice, AQ, QP, PO, ON, NM, ML, LK, KI. ducantur tandem rectæ QC, PD, OE, NF, MG, LH, AK. erunt itaque ſectores octo, quorum primi ſcilicet AIB, & vltimi HIA triangula rectilinea in duo triangula diuiduntur; ſex verò cæterorum triangula ſingula in alia tria ſubdiuiduntur. quoniam verò octo ſunt ſemidiametri in circulatione, ſit AI 8. erit IK vnitas. ſtatuatur triangulorum ſingulorum ſuperficies vnitatum eſſe 8. erit propterea ſuperficies octo triangulorum 64. ad valorem autem illorum triangulorum exprimendam tale ſit diagramma.

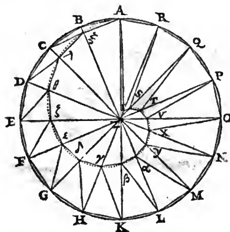
AIB	8.	Triangulorũ in ſectoribus valor.		*	Triangulorum ſeptem valor.	BAI	8	Triangula octo reſidua, ablatis 2æ columnæ angulis à primæ triãgulis.	BAQ	1	Triãgula octo ex reſiduis accepta.
BIC	8.		BCQ	1		CQI	7		CQP	1 $\frac{6}{8}$	
CID	8.		CDP	2		DPI	6		DPO	2 $\frac{4}{8}$	
DIE	8.		DEO	3		EOI	5		EON	2 $\frac{4}{8}$	
EIF	8.		EFN	4		FNI	4		FNM	2 $\frac{4}{8}$	
FIG	8.		FGM	5		GMI	3		GML	2 $\frac{2}{8}$	
GIH	8.		GHL	6		HLI	2		HLK	1 $\frac{6}{8}$	
HIA	8.		HAK	7		AKI	1		AKI.	1	
Summa 64.			Summa 28.						Summa 15.		

Sunt ergo AIB, BIC, &c. numeri 1æ columnæ ſimul additi, æquales 64 quadrato lateris 8. Numeri 2æ columnæ triãgulorũ BCQ, &c. termini progreſſionis dempto maximo. Numeri 3æ columnæ ſunt reſidua triangula poſt ſubtractionem.

Numeri quartæ ſunt partes acceptæ ex octo terminis progreſſionis. Diuiſio autem illa triangulorum ſic inſtituta eſt. eſt triangulum CIB, ad triangulum BCQ; vt BI ad BQ. id eſt vt 8 ad 1. eſt enim propter helicem BQ 1. & BI 8. ſúntque ambo triangula ſub eadem altitudine; & ſic in cæteris.

Ablatis ergo ſeptem triangulis, quorum ſumma eſt 28. de ſectoribus ſeptem, reſidua erunt triangulum BAI, & triangula ſeptem CQI & ſequentia tertiæ columnæ. Quæ octo in alia bina vnumquodque, excepto vltimo, diuiduntur in eadem ratione, ac triangula ſeptem in circuli ſectoribus accepta; id eſt ex BAI, vna octaua pars accipitur, nempe BAQ. ex CQI duæ octauæ, nempe CQ, & ſic deinceps tres, quatuor, &c. & vltimum AKI totum accipitur ſeu ipſius $\frac{8}{8}$. Summa itaque triangulorum ſeptem in continua progreſſione arithmetica, 28. & octo triangulorum, quæ eſt 15. eſt 43. qua conſtant illa quindecim triangula inter latera octogoni in circulo, & latera polygoni in ſpirali deſcripti. Sed tota ſuperficies octogoni talium eſt 64. ſuperficies itaque polygoni ſpiralis erit 21. & erit hoc polygonum ſpiralis ad octogonum circuli vt 21 ad 64. eſt itaque ratio polygoni ad octogonum minor quàm ſubtripla.

Sed diuidatur circulatio prima in polygonum ſexdecim laterum æqualium, vt in adiuncta figura. ſtatuatur ZA partium 16, ZI verò partis vnius propter ſpiralem.



Triangulorum sexdecim in circuli sectoribus valor.		Triangulorum quindecim valor.		Triangula xvi residua ablatis secundæ columnæ triangulis à primæ triangulis quæ sunt in sectoribus.		Triangula xvi ex residuis antecedentis columnæ accepta.	Partes decimæ sextæ vnius sunt hi 14 10. &c.	
AZB	16	*	*	BAZ	16	BAξ	1.	
BZC	16	BCξ	1	CξZ	15	Cξλ	1.	14
CZD	16	CDλ	2	DλZ	14	Dλθ	2.	10
DZE	16	DEθ	3	EθZ	13	Eθζ	3.	4
EZF	16	EFζ	4	FζZ	12	Fζε	3.	12
FZG	16	FGε	5	GεZ	11	Gεδ	4.	2
GZH	16	GHδ	6	HδZ	10	Hδγ	4.	6
HZK	16	HKγ	7	KγZ	9	Kγβ	4.	8
KZL	16	KLβ	8	LβZ	8	Lβα	4.	8
LZM	16	LMα	9	MαZ	7	Mαγ	4.	6
MZN	16	MNγ	10	NγZ	6	NγX	4.	2
NZO	16	NOX	11	OXZ	5	OXV	3.	12
OZP	16	OPV	12	PVZ	4	PVT	3.	4
PZQ	16	PQT	13	QTZ	3	QTS	2.	10
QZR	16	QRS	14	RSZ	2	RSI	1.	14
RZA	16	RIA	15	AIZ	1	AIZ	1.	
Summa 256. superficies xvi triangulorum in sectoribus.		Summa 120 superficies triangulorum xv.				Summa 51. superficies triangulorum xvi.		

Hæc residua triangula BAξ, Cξλ &c. ordinis quarti partes sunt trianguolrum BAZ, CξZ seriei antecedentis, & in eadem ratione diuisa sunt ac triangula in circuli sectoribus BCξ, CDλ, &c. id est ex BAZ vna decima sexta pars, ex CξZ duæ decimæ sextæ partes, & sic deinceps tres, quatuor, quinque, &c. cúmque CξZ sit 15 vnitatum, ab eo demptæ duo octauæ sunt 1. & quatuordecim decimæ sextæ. secatúrque CξZ in ratione Cλ ad λZ, id est 2 ad 8. & sic deinceps. vltimum verò AIZ totum accipitur, nempe $\frac{16}{16}$.

Triangula igitur xv. quæ colligunt numerum 120. & triangula xvi. quæ colligunt 51. simul sumpta sunt xxxi. numerúmque colligunt 171. quod spatium est comprehensum inter latera heccædecagoni circulo inscripti, & latera polygoni spirali inscripti. patet ergo, quod ablatis his xxxi triangulis 171, de superficie polygoni circulo inscripti 256. residuum erit 85. spatium contentum sub

ſub polygono ſpirali inſcripto. Polygonum igitur laterum XVI circulo inſcriptum, ad polygonum helicis totidem laterum, ſe habet vt 256 ad 85. & permutando. Polygonum helicis ſe habet ad polygonum circuli, vt 85 ad 256 in proportione ſubtripla, minus triente vnitatis vnius.

Quoniam verò in polygono ſexdecim laterum creuerunt numeri in proportione quadrupla numerorum octogoni; ſi numeri illi in polygono ſexdecim laterum inuenti reducantur ad numeros octogoni, omnibus per 4 diuiſis, nempe 256 polygono circuli, & 85 polygono ſpiralis; erit polygonum ſexdecim laterum circulo inſcriptum 64. polygonum verò totidem laterum ſpirali inſcriptum 21 $\frac{1}{4}$. ſed in octogono fuit ſolummodo 21. ergo in polygono ſexdecim laterum creuit quadrante vnitatis vnius.

Iam verò duplicatum intelligatur polygonum, & fiat laterum 32. quadrupli erunt numeri ſuperficiei polygoni, numerorum polygoni laterum XVI. eritque ſuperficies tota 1024. polygonus verò ſpiralis erit 341. qui numeri per 16. diuiſi, vt reducantur ad numeros polygoni laterum VIII, exhibebunt polygonum circuli 64. polygonum verò ſpiralis 21. $\frac{5}{16}$ hoc eſt $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{16}$ & ſic deinceps. Augetur ergo ratio polygonorum ſpiralis ad polygonos circuli quadrantis vnitatis vnius partibus in ratione continua ſubquadrupla progredientibus, quæ omnes ſimul colliguntur in ſpatio ſub ſpirali primæ circulationis & linea prima comprehenſo. Maior eſt itaque ratio ſpatij huius ad circulum, quam polygoni ſpiralis ad polygonum circuli, quantitate partium quadrantis vnius vnitatis in ſubquadrupla continua ratione progredientium. Sed omnes illæ partes progreſſionis ſubquadruplæ quadrantis ſimul additæ efficiunt trientem vnitatis vnius, cuius denominator vnitate minor eſt, quàm denominator proportionis ſub qua facta eſt progreſſio. Hic itaque triens vnitatis additus polygono ſpiralis 21. exhibebit ſpatium ſpirali & prima linea contentum 21 $\frac{1}{3}$, eſt autem polygonum circulo inſcriptum 64. ergo ſpatium ſpirali Z I V β ζ A & linea prima Z A contentum erit pars tertia circuli primi AEK. Quod erat demonſtrandum.

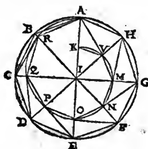
PROPOSITIO XXXIX.

Spatium lineæ ſpirali, in ſecunda circulatione deſcripta, & re-

cta lineâ secunda, in principio circulationis, contentum, eam proportionem habet ad circulum secundum, quam 7. ad 12.

DEMONSTRATIO.

SIT secunda spiralis circulatio K M O Q A. cuius principium K. linea secunda in principio circulationis I A. circulus secundus A C E G. circulo inscribatur octogonum æquilaterum A B C D E F G H, ducantúrque diametri A E, B F, C G, D H. quoniam ergo diametri ductæ sunt ad secundum circulum A C E G, secabunt spiralem in nouem punctis. quæ si bina proxima iungantur subtensis K V, V M, M N, N O, O P, P Q, Q R, R A, erit etiam polygonum octo laterum inscriptum spirali. ducantur præterea rectæ R C, Q D, P E, O F, N G, M H, V A. erunt itaque in circulo octo sectores A I B, B I C, &c. octo etiam triangula A I B, B I C, quorum singula (excepto primo A I B, quod in duo diuiditur) in triangula tria rectilinea diuiduntur. Quoniam verò octo sunt sectores, & octo semidiametri, sit I K, partium 8. quia secunda circulatio est, I A erit partium 16. vnaquæque pariter triangulorum rectilineorum superficies in sectoribus statuatur partium 16. erit totius polygoni circulo inscripti superficies partium 128. ad quorum valorem exprimendum tale sit diagramma.



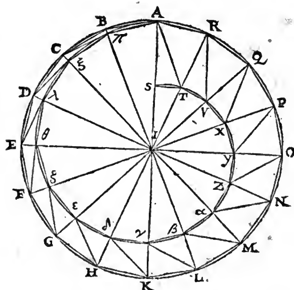
	Triangulorum VIII in totidem sectoribus valor.		Triangulorum VIII a primis ablatorum valor.		Triangula octo septem ablatis ab octo primis residua.		Partes decimæ sextæ. Triangula octo à præcedentibus ablata.
A I B	16	*	*	B A I	16	B A R	1.
B I C	16	B C R	1	C R I	15	C R Q	1. 14
C I D	16	C D Q	2	D Q I	14	D Q P	2. 10
D I E	16	D E P	3	E P I	13	E P O	3. 4
E I F	16	E F O	4	F O I	12	F O N	3. 12
F I G	16	F G N	5	G N I	11	G N M	4. 2
G I H	16	G H M	6	H M I	10	H M V	4. 6
H I A	16	H A V	7	A V I	9	A V K	4. 8
Summa 128.		Summa	28			Summa	25. $\frac{1}{2}$

In vltima hac columna primi numeri sũt vnitates; secundi partes sunt decimæ sextæ vnius. secũdi itaque triãguli C R Q valor est vnitatis vnius & decimæ sextæ quatuordecim.

Summæ itaque triangulorum VII, nempe 28, & triangulorum octo, nempe 25 $\frac{1}{2}$ iunctæ faciunt triangula XV, nempe 53 $\frac{1}{2}$ qua polygonum circulo inſcriptum excedit polygonum ſpiralis. Eſt autem polygonum circuli 128. ergo polygonum ſpiralis 74 $\frac{8}{16}$, cùm verò ſit fractio $\frac{8}{16}$ ſeu $\frac{1}{2}$, duplicatis numeris, habebimus polygonum circuli 256. & polygonum ſpiralis ſub ſecunda circulatione & linea ſecunda contentum 149. numerus verò 149 ad 256 ſe habet vt 7. ad 12. minus $\frac{1}{3}$ vnitatis. ſe habent enim 149 $\frac{1}{3}$ ad 256 vt 7. ad 12.

Diuidatur deinde circulus ſecundus, & helicis circulatio ſecunda in octogonum XVI laterum, polygonúmque totidem laterum. Statuatúrque I S 16. AI verò 32. Circulo inſcriptum polygonum erit 512. Singulis triangulis factis partium 32. omnia ergo triangula, vt in ſubiecto diagrammate cernitur, ita ſe habebunt.

AIB	32	Triangulorum XVI in totidem ſectoribus valor.	* *	*	Triangulorum XV à primis ſexdecim ablatorum valor.	AIB	32	Triangula XVI ablatis quindecim reſidua.	BAπ	1.	Partes triceſimæ ſecundæ.	Secũdi numeri huius poſtremæ colũnæ ſunt partes triceſimæ ſecundæ, vt 1. 30 id eſt vnitas & triginta triceſimæ 2æ.
BIC	32		BOϖ	1		CπI	31		Cπξ	1. 30		Triangula 16 à præcedentibus ablata.
CID	32		CDξ	2		DξI	30		Dξλ	2. 26		
DIE	32		DEλ	3		EλI	29		Eλθ	3. 20		
EIF	32		EFθ	4		FθI	28		Fθζ	4. 12		
FIG	32		FGζ	5		GζI	27		Gζε	5. 2		
GIH	32		GHε	6		HεI	26		Hεδ	5. 22		
HIK	32		HKδ	7		KδI	25		Kδγ	6. 8		
KIL	32		KLγ	8		LγI	24		Lγβ	6. 24		
LIM	32		LMβ	9		MβI	23		Mβα	7. 6		
MIN	32		MNα	10		NαI	22		NαZ	7. 18		
NIO	32		NOζ	11		OZI	21		OZy	7. 28		
OIP	32		OPy	12		PyI	20		PyX	8. 4		
PIQ	32		PQX	13		QXI	19		QXV	8. 10		
QIR	32		QRV	14		RVI	18		RVT	8. 14		
RIA	32		RAT	15		ATI	17		ATS	8. 16		
Summa 512			Summa 120						Summa 93 cum ſexdecim triceſimis ſecundis.			



Summa itaque triangulorum xv à primis sexdecim ablatorum est 120. Summa verò x v i vltimorum est 93 $\frac{1}{2}$. Triginta ergo & vnum triangula simul iuncta faciunt 213 $\frac{1}{2}$. Summa verò polygoni circulo inscripti est 512. à qua cùm ablata fuerit summa triangulorum xxxi, 213 $\frac{1}{2}$ residuum erit contentum sub polygono spirali inscripto nempe 298 $\frac{1}{2}$, quoniam verò occurrit fractio vnius semissis, duplicatis numeris, vt etiam in octogono fecimus, polygonum circulo inscriptum habebimus 1024. Spirali verò inscriptum 597.

Quia verò quadrupli sunt numeri in polygono heccædecagono eorum, qui octogonum constituunt, diuisis illis per quatuor, polygonum circulo inscriptum 1024 reducemus ad 256. polygonum verò spirali inscriptum 597 reducemus ad 149 $\frac{1}{4}$. polygonum igitur xvi laterum spirali inscriptum se habet ad polygonum circuli, vt 149 $\frac{1}{4}$ ad 256. Sed in octogono erat solummodo vt 149 ad 256. creuit itaque proportio quadrante vnitatis vnius; multiplicatisque polygonis crescet in eadem proportione subquadrupla quadrantis vnius, cuius proportionis subquadruplæ

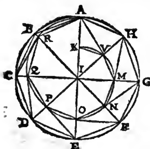
omnes partes simul sumptæ trientem vnitatis vnius conficiunt. Totum ergo contentum sub spirali secundæ circulationis, & linea recta secunda in principio eiusdem, erit ad totum circulum vt 149 $\frac{1}{3}$ ad 256. id est vt 7. ad 12. Quod erat demonstrandum. Vtriusque porro numeri communis mensura est 21 $\frac{1}{3}$.

PROPOSITIO XL.

Contentum sub spirali secundæ circulationis K M O Ω A, & linea recta secunda, quæ in principio circulationis, A K, se habet ad circulum secundum, vt 7. ad 12, vt iam est demonstratum, & præterea etiam se habet illud contentum ad circulum, vt rectangulum contentum sub semidiametro secundi circuli A I & semidiametro primi K I, simúlque tertia pars quadrati eius lineæ, qua semidiameter circuli secundi excedit semidiametrum primi, ad A I semidiametri circuli secundi quadratum.

DEMONSTRATIO.

EST superficies circuli, ad spatium sub spirali KOA & recta K A vt 12 ad 7. Sit quadratum A I, semidiametri circuli secundi, 1. erit rectangulum I AK semissis quadrati A I. quadratum verò AK quarta pars est quadrati AI. rectangulum itaque I AK vnà cum quadrato AK, tribus quadrantibus quadrati AI sunt æqualia. Sed circulus ad spatium ostensum est vt 12 ad 7. quadratum verò AI, ad hæc simul rectangulum I A K & quadratum AK, se habet vt 1 ad $\frac{3}{4}$ seu, posito AI quadrato 12, vt 12 ad 9. Sexta pars igitur totius quadrati A I auferenda est à rectangulo IAK, & quadrato AK. auferatur itaque à minima parte nempe à quadrato AK, quæ quarta pars est quadrati AI, & trium est vnitatum, existente quadrato AI 12. cùm ergo ab AK quadrato duas vnitates abstulerimus, quæ sexta



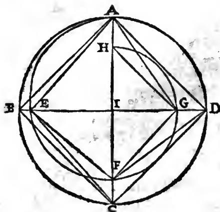
pars est totius quadrati AI, tertia pars quadrati ipsius A K vnà cum rectangulo IAK erit partium 7. Itaque contentum sub spirali secundæ circulationis KMOQA & linea, quæ in principio circulationis, AK, ad quadratum AI est, vt 7 ad 12. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLI.

Spatium, linea spirali in tertia circulatione descripta, & recta linea tertia in principio circulationis, contentum eam proportionem habet ad circulum tertium, quam 19. ad 27.

DEMONSTRATIO.

SIT data tertia circulatio spiralis HGFEA, cuius principium H. linea tertia in principio circulationis AH. Circulus tertius ABCD. Dico spatium contentum sub spirali HGFEA & linea AH, eam proportionem habere ad circulum ABCD, quam 19 ad 27.

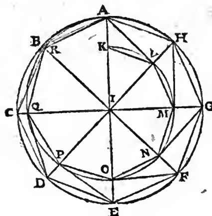


Circulo inscribatur tetragonum ductis ad angulos rectos diametris AC, BD & subtensis AB, BC, CD, DA. Quoniam diametri ductæ ad tertium circulũ pertingũt, spiralem etiam in quinque pũctis A, E, F, G, H, secabũt. quæ si bina proxima iungantur subtensis AE, EF, FG, GH erit etiam polygonum totidem laterum descriptũ. ducantur prætera rectæ EC, FD, GA, erunt itaque in circulo quatuor sectores AIB, BIC, CID, DIA, & totidem triangula rectilinea, quorum singula (excepto primo AIB, quod in duo diuiditur) in triangula tria,

rectilinea diuiduntur. Quoniam verò tertia eſt circulatio, & ſunt quatuor ſemidiametri poſitæ in circulatione, ſit primi circuli ſemidiameter 4. ſecundi circuli ſemidiameter IH erit 8. & ſemidiameter tertij IA 12. ſtatuatur vnaquæque triangulorum AIB, BIC, CID, DIA ſuperficies eſſe 12. erit totius polygoni circulo inſcripti ſuperficies 48. ad valorem autem illorum triangulorum exprimendum tale ſit diagramma.

AIB	12	Triangulorum IV. in ſe-ctoribus valor.	*	*	Trianguloru trium ab anteced. ablator. valor.	BAI	12	Triangula IV. reſidua ablatis tribus anteced.	BAE	1.		Partes duodecimæ.	Triangula IV. ab antecedentibus ablata.
BIC	12		BCE	1		CEI	11		CEF	1.	10		
CID	12		CDF	2		DFI	10		GFD	2.	6		
DIA	12		DAG	3		AGI	9		AGH	3.			
Summa 48.			Summa 6						Summa 8 $\frac{1}{3}$				

Polygoni itaque circulo inſcripti ſuperficies eſt 48. triangulorũ verò trium primorum eſt 6. quatuor vltimorum ſumma 8 $\frac{1}{3}$. Septem ergo triangulorum BCE &c. BAE &c. ſumma eſt 14 $\frac{1}{3}$ differentia polygonorum, cùm ablata fuerit à ſumma polygoni circulo inſcripti 48, reſiduum exhibet 33 $\frac{2}{3}$ quantum nimirum eſt ſpiralis polygonum. verùm cùm fractio adhæreat, ad vnitates integras reducendi ſunt illi numeri, vtroque per ternarium multiplicato. erit ergo polygonum ſpiralis 101. polygonum circuli 144. quare erit polygonum ſpiralis ad polygonum circuli, vt 101 ad 144. Diuidatur porro circulatio tertia in octogonum, & primi circuli ſemidiameter ſit 8. ſecundi ſit IK 16. tertij IA 24. erit polygonum circulo inſcriptum 192. factis ſingulis triangulis AIB &c. 24 vnitatum. Omnia ergo triangula vt in diagrammate appoſito ſe habebunt.



A I B	2	Triangula VIII totidem ſectorum.	* *	*	Triangulorum VII ab antecedentibus ablatorum valor.	BAI	24	Triangula VIII reſidua, ablatis VII antecedentib. ab octo primis.	B A R	1.	Partes viceſimæ quartæ.	Triangula VIII à præcedentibus ablata.
B I C	24		BCR	1		C R I	23		C R Q	1.22		
C I D	24		C D Q	2		D Q I	22		D Q P	2. 18		
D I E	24		DEP	3		EPI	21		E P O	3. 12		
E I F	24		EFO	4		FOI	20		F O N	4. 4		
F I G	24		FGN	5		G N I	19		G N M	4.18		
G I H	24		G H M	6		H M I	18		H M V	5. 6		
H I A	24		H A V	7		A V I	17		A V K	5. 16		
Summa 192.			Summa 28						Summa 29			

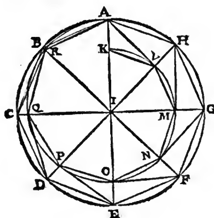
Polygoni igitur circulo inſcripti ſumma eſt 192, à qua cùm ablata fuerint triangula x v nempe ſeptem BCR &c. quorum ſumma eſt 57. reſiduum erit 135. tótque vnitatum eſt polygonum ſpiralis. In octogono itaque, ratio polygoni ſpiralis ad polygonum circuli eſt, vt 135 ad 192. Quia verò in tetragono triplicauimus numeros, vt ad integros reduceremus, in octogono etiam ſunt triplicandi, vt in ipſo numeri ſint in ratione quadrupla eorum qui in tetragono. Erit igitur polygonum ſpiralis in octogono 405. Circuli verò polygonum 576. quoniam verò polygoni huius numeri quadrupli ſunt antecedentis tetragoni, quando per quatuor ipſa diuiſerimus, polygonum ſpiralis habebimus 101 $\frac{1}{4}$ circuli verò 144. ſed in tetragono in iiſdem numeris ratio polygoni ſpiralis

ſpiralis ad polygonum circuli erat vt 101 ad 144. creuit itaque illud ſpiralis polygonum quadrante vnitatis vnius; multiplicatiſque polygonis, creſcet quadrantis iſtius partibus ſubquadruplis in continua infinitáque progreſſione.

Omnes ergo partes illius ſubquadruplæ quadrãtis progreſſionis trientem vnius vnitatis conficient, qui triens additus 101 dabit totum ſpatium comprehenſum ſub ſpirali 101 $\frac{1}{3}$. erit verò comprehenſum ſpatium circulo 144. vt autem in integris habeamus illas quantitates, triplicandi ſunt numeri. erit propterea ſpatium ſpiralis 304. circuli 432. quibus diuiſis per 16. communem menſuram, ſpiralis ſpatium erit ad circulum vt 19 ad 27. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLII.

Spatium ſub circulatione tertia ſpiralis KMOQA, & AK contentum eſt ad circulum tertium ACG, vt hæc ſimul, rectangulum AIK, & triens quadrati AK, ad quadratum AI.



DEMONSTRATIO.

CVM enim AI ſit 24. erit AK 8. quare rectangulum ſub AI, IK erit 384. quadratum AK eſt 64. cuius triens eſt

I

21 $\frac{1}{3}$. ſumma igitur rectanguli A I K, & trientis quadrati A K eſt 405 $\frac{1}{3}$. quadratum verò A I eſt 576. eſt ergo AIK rectangulum cum triente quadrati A K ad quadratum AI, vt 405 $\frac{1}{3}$ ad 576. ſeu ob fractionem triplicatis numeris vt 1216 ad 1728. qui numeri per 64 communem menſuram diuiſi exhibent hæc ſimul, rectangulum AIK & trientem quadrati A K 19. quadratum verò A I 27. eſt ergo vt rectangulum AIK & triens quadrati AK ſimul, ad quadratum A I, ita 19 ad 27. ſed demonſtratum eſt ſpatium ſpiralis eſſe ad circulum vt 19 ad 27. quare ab æquali, ſpatium ſub ſpirali tertiæ circulationis & tertia linea contentum eſt ad circulum tertium, vt hæc ſimul rectangulum A I K & triens quadrati A K ad quadratum A I. Quod erat demonſtrandum.

Similes in ſequentibus circulationibus confici poſſunt demonſtrationes. ſed quæ iam demonſtrauimus alio medio adhuc oſtendemus.

NOTA I.

Ex demonſtratis proprietas quædam ſpatiis polygonorum helicis communis deprehenditur cum triangulis parabolæ inſcriptis, quæ eandem cum ipſa altitudinem habent. Spatium enim vtrumque inter trianguli latera & parabolam lineam comprehenſum, conficitur quadrantis trianguli parabolæ inſcripti, ſecundum infinitam ſubquadruplam progreſſionem, partibus omnibus ſimul ſumptis, quæ trientem conficiunt. & illi triangulo parabolæ inſcripto additis; vnde ſpatium parabola linea & baſi trianguli comprehenſum ſeſquitertium oſtenditur ſpatij trianguli inſcripti. Spatium verò in ſpirali, quod inter ipſam & polygonum ipſi inſcriptum intercipitur, polygonis duplo laterum numero à quaternario inſcriptis, conficitur quadrantis vnitatis vnius omnibus in ſubquadrupla progreſſione partibus, quæ trientem efficiunt, polygono additis. quæ proprietas cæteris, quas alij authores demonſtrarunt, adiungenda eſt.

NOTA II.

Per methodum indiuiſibilium ſubtiliſſimi Geometræ Bonauenturæ Caualerij, rationem ſpatij inter ſpirales primæ circulationis, & vnius ſequentium circulationum comprehenſi, ad circulum ſequenti circulationi reſpondentem inquirere volumus. verbi gratia ſpatij inter primam & ſecundam circulationes com-

prehensi, ad circulum secundum; aut spatij inter primam & tertiam comprehensi, ad circulum tertium, & sic deinceps. Inuestigauimus ergo generationem illius spatij, & mensuram eandem permanentem in illius generatione, quam proposit. 44. explicamus. Obiter hîc notabimus tam perperam, ac improprio nomine *indiuisibilium methodum*, nouum suum artificium appellauisse Cauallerium, quàm subtili ac mirabili sagacitate, profundáque mentis indagine illud inuenisse. Nulla enim quantitas continua est indiuisibilis. Debuerat Cauallerius animaduertisse artificium eiusmodi, aliud nihil esse, quàm *eiusdem mensuræ, vel eiusdem proportionis, per omnes duarum positarum magnitudinum partes, continuam similémque in infinitum applicationem*. Ita vt appositè magis illam excellentissimam methodum ὁμοιοσυμμετρίας appellauisset, quàm *indiuisibilium*. Quod tamen tanti viri, mihi olim noti ac amici famæ detrahendi animo dictum nullus credat; illum enim maximi semper feci, & veneratus sum; tam pulchrum verò ipsius inuentum conuenienti nomine appellatum non fuisse, mihi displicet; & si immutauero, nec ipse si viueret molestè laturus esset; cæteros etiam non ægrè passuros esse confido.

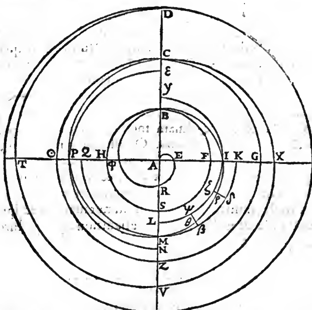
PROPOSITIO XLIII.

Si spiralis inter principium ipsius & circulum, qui primo maior non sit, vel inter duos circulos intra vnam circulationem transeat, omnium linearum à centro ductarum portiones inter punctum principij & circulum, vel inter vtrumque circulum interceptas ita secat, vt harum portionum partes omnes intercepta inter spiralem & minorem circulum, æquales sint omnibus inter spiralem & maiorem circulum interceptis.

DEMONSTRATIO.

IN primâ circulatione spiralis A E R φ B inter punctum principij A & circulum primum BFS ipsa transit, lineæ sunt A B, AF, AS, AH, à centro ductæ. Dico portiones AE, AR Aφ AB interceptas inter punctum A & spiralem, æquales esse portionibus interceptis inter spiralem & circulum BFS. nempe Hφ, RS, FE, AB. æquales enim sunt AE, Hφ, æquales AR, RS,

tandémque Aφ, EF. tribus ergo AE, AR, Aφ, æquales sunt tres Hφ, RS, FE. communis est vtrisque AB. quatuor ergo AE, AR, Aφ, AB, æquales sunt quatuor Hφ, RS, FE, AB, quod erat demonstrandum.



In secunda circulatione transeat spiralis Iρ θ M inter circulos Iψ L, KβM. lineæ à centro ductæ sunt IK, ζδ, ψβ, LM. Dico portiones harum inter spiralem & minorem circulum interceptas nempe ζρ, ψθ, LM, æquales esse interceptis inter spiralem & maiorem circulum tribus nempe θβ, δρ, IK.

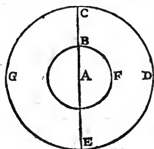
Sunt enim omnes IK ζδ, ψβ, LM, inter se æquales. propter spiralem verò est, vt totus arcus MK ad totam IK, ita arcus Mδ, ad δρ; & ita Mβ, ad βθ. Sed & similes sunt arcus IL, Iψ Iζ arcubus MK, Mδ, Mβ, & LM æqualis est IK, erit etiam propter spiralem, vt IL ad LM, ita Iψ ad ψθ; & ita Iζ ad ζρ. Cùm itaque LM æqualis sit IK, etiam aliæ ψθ, ζρ, æquales erunt aliis δρ, βθ. omnes ergo interceptæ inter spiralem Iρθ M, & circulum maiorem KM, æquales sunt omnibus interceptis inter spiralem & circulum minorem IL. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Si circa circulum magnitudine datum BF reuoluatur linea recta BC, quæ ad A centrum directionem habeat, hoc est in directum producta per centrum A semper transeat; dum verò reuoluitur lineam curuam CDE describat, & spatium BCDEG. Dico lineam CDE, circulum esse, & spatium BCDEG ad circulum ABF proportionem eandem habere, quam hæcce simul habent, quadratum lineæ reuolutæ BC, & bis rectangulum sub ipsa BC reuoluta & semidiametro AB, ad quadratum AB.

DEMONSTRATIO.

QVONIAM BC eadem semper magnitudine manet, & ad A centrum directionem seruat, erit AC vbique æqualis. atque adeo reuoluta, immobili manente puncto A altero termino C circulum describet, & longitudine sua BC spatium inter duos circulos contentum, quo differt circulus BF à circulo CD. est autem circulus BF, ad circulum CD; vt quadratum AB ad quadratum AC. Sed differt circulus BF à circulo CD, spatio BC DEFG. & quadratum AB à quadrato AC differt, quadrato BC plus bis ABC rectangulo. Ergo erit spatium BCDEFG ad circulum AB; vt hæc simul; quadratum BC & bis rectangulum ABC, ad quadratum AB. Quod erat demonstrandum.



COROLLARIVM I.

Consequitur etiam spatium BCDEFG, esse ad circulum AC, vt hæc simul quadratum BC, & bis rectangulum ABC, ad quadratum AC.

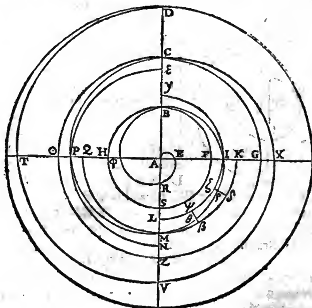
COROLLARIVM II.

Componitur ergo spatium BCDEFG ex infinitis spatiis, quæ linea BC pertransit dum reuoluitur; eorúmque parti vni respondent quadrata omnia BC, residuæ verò respondent rectangula omnia ABC bis sumpta. per quæ simul sumpta ad quadrata AB

comparata, ſpatium BCDEFG ſic compoſitum comparatur ad circulum BF; & per eadem ad quadratum AC comparata, ſpatium BCDEFG ad circulum CD comparatur. vt autem vnum ad vnum, ita omnia ad omnia. comparatio itaque adſumptis omnibus quadratis & rectangulis etiam fiet.

PROPOSITIO XLV.

Spatium quod inter primam circulationem ſpiralis & ſequentem ſecundam vel tertiam continetur, generatur à ſemidiametri circuli, qui per adſumptæ circulationis principium tranſit, circa primam ſpiralis circulationem reuolutione; ita tamen vt ſemidiameter illa reuoluta directionem ſeruet ad initium primæ circulationis.



DEMONSTRATIO.

SIT prima ſpiralis circulatio AERφB. ſecunda BIMPC. Dico, quòd ſpatium contentum inter illas circulationes & li-

neam AC, generatur à reuolutione ſemidiametri AB circuli BFS (*qui per principium ſecundæ circulationis hic adſumptæ tranſit*) circa primam circulationem ſpiralis AERφB, ſeruante interim AB directionem ad A punctum, quod principium eſt primæ circulationis. Cùm enim æqualiter per æquales angulos & ſimiles arcus creſcant omnes lineæ ab A principio ductæ ad ſpiralem, ſub angulo BAI æqualiter creſcet AE in prima circulatione, ac AB in ſecunda, erítque AE incrementum æquale FI incremento. ab A enim puncto ad E creuit AE; ab F verò in I creuit AF. erunt itaque æquales AB, EI, RM, φP, BC, & ſingulæ omnes ſemidiametro circuli, qui per principium ſpiralis ſecundæ circulationis tranſit; dum ergo AB ſemidiameter circuli BFS æqualis ſibi vbique manet, ſeruátque directionem ad punctum A, & circa primam ſpiralis circulationem reuoluitur, ſpatium BAERφBCPMIB inter illas duas circulationes & lineam AC contentum generat. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVI.

Semidiameter circuli, qui per principium adſumptæ circulationis tranſit, reuoluta circa primam ſpiralis circulationem, per maiores ſucceſſiuè circulos etiam reuoluitur.

DEMONSTRATIO.

Videatur figura p. 70.

HOc manifeſtum eſt. nam quando A venerit in E, tunc erit B in I, & tranſibit E per peripheriam circuli, cuius ſemidiameter erit AE, quæ maxima eſt omnium, quæ in AE accipi poſſunt, & alter terminus B, qui venit in I, per maiorem circulum yIL tranſit, quam per BFS. quando autem venerit AB in RM; tranſibit terminus R, per circulum cuius diameter AR, maiorem circulo AE. & punctum M tranſibit per circulum KMQ, maiorem circulo yIL. & ſic deinceps. ergo reuoluta AB circa AERφB per maiores ſucceſſiuè circulos reuoluitur. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Cùm ergo per maiores circulos ſucceſſiuè reuoluatur, maiora etiam ſucceſſiuè ſpatia pertranſibit inter circulos ſeſe ſu-

perantes intercepta. minus est enim FBI, quam LIM, & minus hoc quam PMQ, atque adeo spatium BAEI, minus est spatio EIMR, & hoc minus spatio φRMP, & sic deinceps.

PROPOSITIO XLVII.

Videatur figura p. 70. *Si per spiralis secundæ, vel alicuius sequentium circulationum, principium circulus ducatur, aliúsque per terminum absolutæ eiusdem: quotlibet deinde lineæ rectæ à centro communi circulorum, quod initium spiralis est, ducantur ad maiorem circulum, illarum rectarum interceptæ partes omnes inter ambos circulos simul sumptæ, duplæ sunt omnium simul sumptarum, quæ inter alterutrum circulum & spiralem intercipiuntur.*

DEMONSTRATIO.

SIT spiralis secundæ circulationis BIMPC, per cuius principium B transeat circulus BFS, & alius COZ per illius confectæ terminum C. ab A verò centro circulorum communi, quod & initium est spiralis, ducantur quotlibet lineæ, AG, AZ, AO, AC. ad circulum COZ. Dico linearum illarum partes omnes inter circulos BFS, COZ interceptas & simul sumptas, duplas esse simul sumptarum omnium, quæ inter alterutrum circulorum & spiralem intercipiuntur.

Cùm enim omnes interceptæ inter circulum COZ & spiralem sint quatuor OP, MZ, IG, BC. & æquales sint interceptis inter circulum BFS & spiralem, nempe quatuor FI, SM, HP, BC. erunt OP, HP, simul sumptæ, itémque MZ, SM, & IG, FI æquales tribus FG seu BC additis verò duabus BC. erunt omnes prædictæ lineæ OP, MZ, IG, FI, SM, HP & duæ BC æquales quinque BC. quinque autem istæ BC inter circulos ductæ intercipiuntur per totam circulationem, nempe quatuor per puncta B, F, S, H; respondentia quatuor punctis spiralis BIMP, & vna per punctum C quintum circulationis ad punctum B ducta, quæ spiralis terminos iungit. quare quinque BC duplæ erunt quatuor OP, MZ, IG, BC interceptarum inter spiralem & circulum COZ, etiámque aliarum quatuor FI, SM, HP, BC. Quod erat demonstrandum.

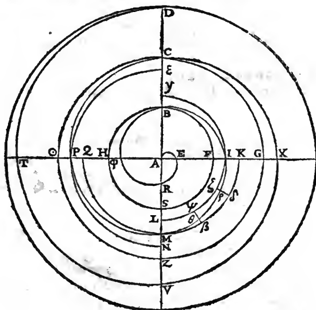
NOTA

NOTA.

Hîc manifestum est bis in circulo accipiendam esse BC, cùm in principio circulationis, nempe in B, iam sit in circulo COZ, semidiameter AC nondum sit in incremento superficiei, quod generatur dum linea AB reuoluta maiores adit circulos infinitos, nempe AI, AM, AP, AC; vt etiam in prima circulatione, prima linea AB, iam est in circulo posita, cùm nondum est in spirali. & hanc ob causam certum est Archimedem in proposit. 24. de spiralibus, omnes semidiametros circuli primi & vnam insuper accepisse; & in proposit. 10. totidem lineas maximæ æquales & vnam insuper lineam maximæ æqualem; quamuis hoc ipse reticuerit, & solummodò prop. 21. de sectore subindicarit.

PROPOSITIO XLVIII.

Spatium, descriptum à reuoluta prædicta semidiametro circa primam circulationem spiralis, componitur ex infinitis spatiis inter infinitos circulos crescentes interceptis, quæ reuoluta semidiameter describit.



DEMONSTRATIO.

CVM enim AB reuoluatur circa AERφB primam circulationem ſpiralis; quando alter terminus A venerit in E; alter nempe B erit in I. Spatiúmque inter circulos auctos AE, AI componitur ex infinitis ſpatiis inter peripherias circulorum infinitorum, per quas tranſeunt termini A, B, dum per quadrantem BAI reuoluitur AB. pariter quando venerit AB in RM; erítque punctum A in R, punctum verò B in M. Spatium inter circulos magnitudine auctos AR, AM, componitur ex ſpatiis inter peripherias circulorum comprehenſis per quas tranſeunt termini AB, dum per quadrantem IAM reuoluitur. & ſic deinceps, cùm ratio per omnia puncta reuolutionis, quæ in hac accipi poſſunt, eadem reperiatur. Itaque totum ſpatium inter primam circulationem AERφB, & ſecundum BIMPC comprehenſum componitur ex ſpatiis infinitis inter circulos creſcentes infinitos comprehenſis. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Per corollarium itaque ſecundùm propoſit. 44. quia ſpatium illud componitur ex ſpatiis intra circulos concentricos comprehenſis pars vna reſpondet quadrato reuolutæ lineæ AB. pars verò omnibus rectãgulis bis ſumptis ſub AB & omnibus lineis ab A ad ſpiralem primæ circulationis ductis, quæ æquales ſunt omnibus inter ſpiralem & circulorum alterutrum interceptis.

PROPOSITIO XLIX.

Videatur figura p. 75. *Spatium totum inter primam circulationem & aliam ſequentem adſumptam ad circulum BFS comparabitur per hæc ſimul, omnia quadrata AB, omniáque rectangula AEI, ARM, AφP, ABC bis ſumpta, ad omnia AB quadrata.*

DEMONSTRATIO.

SVPRA demonſtratum eſt ſpatium generatum à linea reuoluta circa circulum ad eundem circulum ſe habere, vt hæc ſimul, quadratum reuolutæ lineæ, & bis rectangulum ſub ea &

ſemidiametro circuli dati, ad huius ſemidiametri quadratum ſe habent. linea verò A B reuoluitur circa circulos infinitos creſcentes ab A in F. ratio igitur cuiuſlibet ſpatij generati circa quemlibet circulum ad eundem circulum ſe habet, vt hæc ſimul quadratum A B & bis rectangulum ſub A B & circuli ſemidiametro verbi gratia A E contentum, ad quadratum A E. & ſic deinceps. erunt itaque omnia ſpatia deſcripta ſeu generata à reuolutione rectæ AB ad omnes circulos, circa quos ipſa reuoluitur, vt hæc ſimul; omnia quadrata AB & bis omnia rectangula AEI, ARM, AφP, ABC, ad omnia quadrata AE, AR, AH, AB. & circulo, qui cæteros omnes continet, ſpatióque, quod cætera omnia complectitur, acceptis; erit ſpatium inter circulationes generatum, quod omnia complectitur, ad circulum, qui omnes continet, vt hæc ſimul; omnia quadrata AB & bis omnia rectangula AEI, ARM, AφP, ABC, ad omnia quadrata AB. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO L.

Spatium inter circulationes primam & sequentem comprehensum est ad circulum, qui per principium adsumptæ sequentis circulationis transit; vt rectangulum comprehensum sub semidiametris circulorum, qui per vtrumque terminum initij & finis circulationis transeunt, ad quadratum semidiametri circuli, qui per principium circulationis transit.

DEMONSTRATIO.

Videatur figura p. 75.

DICO spatium AERBCPMIB, inter primam & secundam circulationes comprehensum, esse ad circulum BFS, vt rectangulum CAB, sub semidiametris circulorum BFS, COZ contentum ad quadratum AB. totum enim illud spatium se habet ad circulum BFS; vt omnia quadrata AB, vnà cum omnibus rectangulis AEI, ARM, seu omnibus AFI, ASM bis sumptis ad omnia quadrata AB. sed omnia hæc rectangula bis sumpta, æqualia sunt omnibus ABC semel sumptis. cùm interceptæ omnes inter alterutrum circulorum & spiralem subduplæ sint totidem interceptarum inter vtrumque circulum BFS, COZ, & communis altitudo omnium sit AB. Ergo vt totum spatium ad circulum BFS, ita omnia quadrata AB & omnia simul rectangula ABC, ad omnia quadrata AB. vt autem omnia ad omnia, ita vnum ad vnum. Ergo hæc simul quadratum AB & rectangulum ABC, hoc est rectangulum CAB, se habent ad quadratum AB vt spatium AERBCP &c. ad circulum BFS. Quod erat demonstrandum. Est ergo hoc spatium inter primam & secundam circulationem comprehensum duplum circuli BFS. est enim rectangulum CAB duplum quadrati AB.

COROLLARIVM I.

Erit etiam vt rectangulum CAB ad quadratum CA, ita spatium AERBCP ad circulum COZ. Est enim vt quadratum AB ad quadratum AC, ita circulus BFS ad circulum COZ. & permutando, vt AB quadratum ad circulum BFS, ita quadratum AC ad circulum COZ: sed est vt CAB rectangulum ad AB quadratum, ita spatium ad circulum BFS. & permutando, vt CAB re-

ctangulum ad ſpatium, ita AB quadratum ad circulum BFS, ab æquali erit & ſpatium ad circulum COZ, vt CAB rectangulum ad quadratum AC.

Eſt ergo ſpatium inter primam & ſecundam circulationem ſubduplum circuli COZ, cùm rectangulum CAB ſit ſubduplum quadrati CA.

COROLLARIVM II.

Idem etiam in ſequentibus circulationibus demonſtrabitur, in tertia nempe CXVTD, rectangulum DAC, eſſe ad quadratum DC, vt ſpatium AERBCXVTD ad circulum COZ, id eſt vt totum ſpatium ſub tertia circulatione comprehenſum, dempto circulationis primæ ſpatio, ad circulum COZ. & ſic in ſequentibus circulationibus. Videatur figura p. 75.

PROPOSITIO LI.

Spatium linea ſpirali in ſecunda circulatione deſcripta, & recta linea ſecunda in principio circulationis, contentum, eam proportionem habet ad circulum, quam 7 ad 12. quæ eadem eſt ei, quem habent hæc vtraque; rectangulum contentum ſub ſemidiametro circuli ſecundi, & ſemidiametro primi, & tertia pars quadrati eius lineæ, qua ſemidiameter ſecundi circuli excedit ſemidiametrum primi, ad quadratum ſemidiametri ſecundi circuli.

DEMONSTRATIO.

SPIRALIS lineæ ſecunda circulatio ſit BIMPC. Dico quòd ſpatium ea comprehenſum & linea BC quæ principium eſt circulationis, eam habet proportionem ad circulum COZ, quam 7 ad 12. Propter ſpiralem circuli BFS, COZ, & D penes diametros æquali exceſſu ſe ſuperant, & eſt primi BFS ſemidiameter exceſſui æqualis; ideóque AB, BC, CD æquales ſunt. ergo AC ſemidiameter dupla erit ſemidiametri AB. Circulus ergo COZ quadruplus erit circuli BFS. huius autem tertia pars eſt ſpatium AERφBA; quare hocce ſpatium erit vna duodecima pars circuli COZ. ſed etiam demonſtratũ eſt ſpatium AERBCPMIB, eſſe ad circulum COZ, vt rectangulum CAB, ad quadratum AC. eſt autem AC dupla ſemidiametri AB; ergo quadratum AC duplum erit rectanguli CAB. ergo & circulus COZ ſpatij AERB &c. du-

plus erit. id est erit vt 12 ad 6. Cui spatio si adiiciatur spatium AERϕBA vna duodecima pars circuli COZ. erit totus circulus COZ, ad spatium BIMPC; vt 12 ad 7. & inuertendo erit spatium ad circulum vt 7 ad 12.

Demonstrabitur autem esse eadem circuli COZ ad spatium spirali secundæ circulationis & linea CB contentum ratio, ac ea quam habet quadratum AC ad rectangulum CAB vnà cum triente quadrati BC.

Est enim vt quadratum CA ad rectangulum CAB; ita circulus secundus COZ, ad spatium AERBCP &c. Huic si addatur AERB, quod æquale est trienti circuli primi BFS, erit totum BIMPCB confectum spatium. quare si rectangulo CAB addatur triens quadrati AB seu BC, erit vt circulus COZ, ad spatium BIMPCB; ita quadratum AC ad vtraque hæc, rectangulum CAB, & trientem quadrati BC. & inuertendo, vt CAB rectangulum vnà cum triente quadrati BC, ad quadratum AC; ita spatium secunda circulatione spiralis contentum ad circulum secundum COZ. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

In aliis etiam circulationibus idem demonstrabitur. hoc est spatium contentum in qualibet circulatione descripta, & recta linea, quæ secundùm numerum circulationis appelletur, ad circulum eodemmet numero denominatum, eam proportionem habere, quam vtraque hæc; Rectangulum contentum sub semidiametris circulorum, qui per principium & finem circulationis transeunt, & tertia pars quadrati eius lineæ, qua semidiameter maior, circuli scilicet per finem circulationis transeuntis, excedit minorem, qui per principium circulationis describitur, ad quadratum semidiametri maioris illius circuli.

Videatur figura p. 75. In tertia nempe circulatione CXVTD, in qua circulus D eodemmet numero denominatus est, spatium spirali CXVTD & tertia linea CD contentum, ad circulum D tertium eam habet proportionem, quam hæc simul habent, rectangulum sub AD semidiametro circuli tertij & AC semidiametro secundi circuli, qui per principium circulationis tertiæ transit, & triens quadrati CD seu AB, ad quadratum AD.

Spatium enim inter circulationes ostenditur se habere ad cir-

culum D, vt rectangulum DAC ad quadratum AD. nam comparatur ſpatium inter circulationes ad circulum D, per omnia rectangula AEG, ARV, AφT, ABD bis ſumpta, hoc eſt per omnia ABD rectangula, & omnia ſimul quadrata BD; ad quadrata omnia AD. vt autem omnia ad omnia, ita vnum ad vnum; ergo vt ABD rectangulum ſimúlque quadratum BD, id eſt, ADB, vel DAC rectangulum ad quadratum AD, ita ſpatium DTVXCBφREA ad circulum D. Spatio illi ſi addatur AERB ſpatium primæ ſpiralis circulationis, qui triens eſt circuli BFS, & ex altera parte ſi addatur rectangulo DAC triens quadrati AB ſeu CD. erit totum ſpatium CXVTDAD ad circulum D. vt hæc ſimul rectangulum DAC & triens quadrati CD ad quadratum AD.

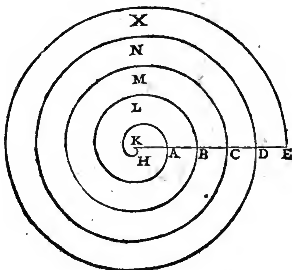
PROPOSITIO LII.

Spatiorum lineis ſpiralibus & rectis, quæ in circulationibus ſunt, contentorum, tertium quidem ſecundi duplum eſt; quartum triplum; quintum quadruplum, & ſequens iuxta numeros, qui deinceps ſunt, ſecundi eſt multiplex; & ſi ſe ſpatia excedunt ſecundi ſpatij magnitudine. Secundum autem primi eſt ſextuplum.

DEMONSTRATIO.

SIT linea ſpiralis in quinque primis circulationibus K, L, M, N, X; HABCD. prima circulatio eſt KA. ſecunda AHLB, tertia BMC; quarta CND. quinta DXE. oſtendere oportet, ſpatij HL inter circulationes primam & ſecundam contenti, & recta KB clauſi duplum eſſe ſpatium AM, quod recta AC clauditur; triplum BN; quadruplum CX.

Demonſtrata ſunt ſpatia inter primam circulationem & ſequentes eſſe ad circulos per circulationum finem tranſeuntes, vt rectangulum ſub ſemidiametris circulorum pet principium & finem cuiuſque adſumptæ circulationis tranſeuntium, ad quadratum ſemidiametri circuli, qui per finem circulationis tranſit, id eſt ſpatium HL eſſe ad circulum BK, vt rectangulum BKA ad quadratum KB, & ſpatium HLAM, ex duobus compoſitum, eſſe ad circulum KC; vt rectangulum CKB, ad quadratum CK. &



ſpatium ex tribus HL, AM, BN eſſe ad circulum KD; vt rectangulum DKC ad quadratum KD. Spatiúmque ex quatuor HL, AM, BN, CX compoſitum, eſſe ad circulum KE; vt rectangulum EKD, ad quadratum KE. ſed quadrata KB, KC, KD, KE gnomonibus ſe ſuperant, qui ſeſe æqualiter excedunt, ergo & rectangula BKA, CKB, DKC, EKD à ſe inuicem differunt magnitudinibus, quæ ſe ſe æqualiter excedunt. Cùm igitur æquales ſint KA, AB, BC, CD, DE, erit rectangulum BKA 2. CKB 6. DKD 12. EKD 20. erit ergo ſpatium HL ad ſpatium HL, AM. vt 2 ad 6. ablato itaque HL ab HL, AM; reſiduum erit AM 4. ſpatium ergo AM duplum eſt ſpatij HL. eſt verò DKC rectangulum 12; atque etiam eſt ſpatium HL, AM ad ſpatium HL, AM, BN, vt CKB rectangulum ad DKC rectangulum, id eſt vt 6 ad 12. ablatis verò HL, AM, erit reſiduum BN 6. eſt verò HL 2. quare quartum ſpatium ſecundi triplum erit.

Eſt rectangulum EKD 20. & ſpatium HL, AM, BN eſt ad ſpatium HL, AM, BN, CX, vt rectangulum DKC, ad rectangulum EKD, id eſt vt 12 ad 20 ablatis verò HL, 2 AM, 4. BN, 6. reſiduum erit ſpatium CX 8. quod eſt quadruplum ſpatij HL 2.

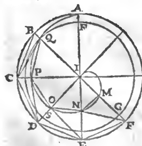
ſicque

ſicque deinceps oſtendetur ſpatium circulationis ſextæ quintuplum eſſe ſpatij HL. æquali enim, vt gnomones, magnitudine ſeſe ſuperant rectangula, duobus nempe quadratis AB, ſeu rectangulo BKA. eſt enim BKA ad CKB, vt KA ad KC. & CKB ad DKC, vt KB ad KD, & DKC ad EKD, vt KC ad KE. exceſſus ergo vbique æqualis, nempe rectangulum BKA. Sed BKA reſpondet ſpatio HL, ergo & omnia ſpatia ſe ſe ſuperabunt ſpatio HL.

Eſſe verò ſpatium HL ſextuplum ſpatij K hinc manifeſtum eſt. HL ſpatium ſemiſſis eſt circuli KB, qui cùm ponetur eſſe 12. ſpatium HL erit 6. circulus verò KA, cuius ſemidiameter ſubdupla eſt ſemidiametri KB, circuli KB eſt ſubquadruplus, ergo circulus KA erit 3. ſed ſpatium K triens eſt circuli KA, erit ergo ſpatium K vnitas, & ſe habebit ad ſpatium HL, vt 1. ad 6. hoc ergo illius eſt ſextuplum.

PROPOSITIO LIII.

Spatium contentum linea ſpirali (quæ ſit minor ea, quæ vna circulatione deſcribitur, quæque non habeat terminum principium lineæ ſpiralis) & contentum rectis lineis, à terminis eius ad principium ſpiralis ductis, ad ſectorem habentem ſemidiametrum æqualem maiori earum, quæ à terminis ad principium ſpiralis ductæ ſunt, circumferentiam verò inter dictas lineas interiectam ad partes lineæ ſpiralis; eam proportionem habet quam vtraque hæc: rectangulum contentum rectis lineis, quæ à terminis ipſius ad ſpiralis principium ducuntur, & tertia pars quadrati eius lineæ, qua maior dictarum linearum minorem excedit, ad quadratum maioris earumdem.



DEMONSTRATIO.

Sit prima ſpiralis circulatio IMNPA, & primus circulus ACE. ſpatiúmque contentum ſub eius parte, quæ non habet terminum in I principio, & rectis lineis QI, MI, quæ à terminis Q.M, ad I principium ducuntur (nempe ſpatium QIMO.) Hoc ad ſectorem QSGI (qui ſemicirculus hic accipitur) habentem ſemidia-

L

metrum æqualem maiori à terminis spiralis ductarum, nempe QI, circumferentiam verò QSG inter lineas BI, FI, & ad partes lineæ spiralis nempe QPON (hoc est spatium spiralis MNOPQIM ad semicirculum QSGI) eam proportionem habet quam vtraque hæc, rectangulum QI, MI, & tertia pars quadrati lineæ MG (qua maior IG seu IQ, minorem MI excedit) ad quadratum maioris QI.

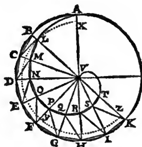
Sint sectores octogoni BIC, CID, DIE, EIF, & subtensæ ducantur in circulo BC, CD, DE, EF. similitérque in spirali subtensæ QP, PO, ON, NM. ducantur etiam rectæ QC, PD, OE, NF. quoniam ergo factus est octogonus, erit AI, 8. IQ, 7. IM 3. & singula sectorum triangula BIC, CID, DIE, EIF erunt etiam 8 partium talium qualium totum polygonum est 64. & qualium totus circulus est 64. talium 8. erunt singuli sectores. Quoniam verò BI est 8, & ideò QI est 7. erit circulus ADE, ad circulum FQSG; vt 64. ad 49. Cùm ergo semicirculi accepti sint, erit BDF 32. & QSG 24. $\frac{1}{2}$. sequenti verò diagrammate valor triangulorum & sectorum explicabitur.

BIC	8.	Triangulorum in totidem sectoribus valor.	BCQ	1	Quatuor triangula ablata à primis.	CQI	7	Triangula IV. residua ablatis antecedentib.	CQP	1·6	Partes octauæ.	Triangula IV. a præcedentibus ablata.
CID	8		CDP	2		DPI	6		DPO	2·2		
DIE	8		DES	3		EOI	5		EON	2·4		
EIF	8		EFN	4		FNI	4		FNM	2·4		
Summa 32.			Summa 10						Summa 7 & sexdecim octauæ id est. 9.			

Summa itaque triangulorum primorum 10. & posteriorum 9, est 19, auferenda à summa quatuor triangulorum in sectoribus, nempe à 32. quarę residuum est 13. contentum quatuor triangulis QIP, PIO, OIN, NIM; sed spatium semicirculi QSG est 24 $\frac{1}{2}$. ratio ergo spatij QPONMI rectilinei, ad rectilineum contentum, sub semicirculo QSG in octogono polygono est, vt 13 ad 24 $\frac{1}{2}$. seu vt 26 ad 49.

Duplicetur iam polygonum, & sit heccædecagonum. erunt itaque AV 16 LV 14, eritque circulus ABC, ad circulum XLYi

vt quadratum AV 256. ad quadratum LV 196. erítque ſemiſſis heccædecagoni in circulo LYZ 98. in circulo verò ADH 128. In diagrammate ergo erunt.



B V C	16	Triangulorum VIII in totidem ſectoribus valor.	B C L	2	Triangula VIII ablata à primis.	C L V	14	Triangula VIII reſidua ablatis antecedentibus à primis.	C L M	2-10	Partes decimæ ſextæ.	Triangula VIII ab antecedentibus ablata.
G V D	16		C D M	3		D M V	13		D M N	3-4		
D V E	16		D E N	4		E N V	12		E N O	3-12		
E V F	16		E F O	5		F O V	11		F O P	4-2		
F V G	16		F G P	6		G P V	10		G P Q	4-6		
G V H	16		G H Q	7		H Q V	9		H Q R	4-8		
H V I	16		H I R	8		I R V	8		I R S	4-8		
I V K	16		I K S	9		K S V	7		K S T	4-6		
Summa 128.			Summa 44.						Summa 28 & 56 decimæ ſextæ, hoc eſt $3\frac{1}{2}$. VIII ergo triangula ſunt $31\frac{1}{2}$.			

Summa itaque triangulorum XVI auferendorum eſt $75\frac{1}{2}$ ab octo triangulis ſemicirculi B D G K 128. reſiduum ergo eſt $52\frac{1}{2}$ valor rectilinei LNPTV ſpirali inſcripti. Sed datus eſt valor ſemiſſis polygoni ſexdecim laterum in circulo LyZ, 98. erit ergo polygonum LNPTV in ſpirali ad polygonũ in circulo LyZ, vt $52\frac{1}{2}$ ad 98; ob fractionem verò multiplicatis numeris, vt 105. ad 196. qui numeri, cùm ſint quadrupli in polygono duplo penes numerum laterum, per quatuor diuidi debent, vt ad eoſdem octogoni numeros reducantur; diuiſis itaque, habebimus polygonum rectilineum LMNOPTV $26\frac{1}{4}$ & polygonum rectilineum circuli L y Z 49. Ergo erit ſpatium LMNOPTV, ad ſectorem ſeu ſemicirculum L y Z in polygono laterum XVI vt $26\frac{1}{4}$ ad 49. Sed

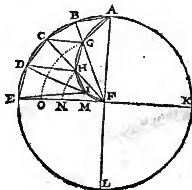
in octogono erat solummodo, vt 26 ad 49. ergo duplicatis polygonis crescit ratio polygoni partis spiralis in proportione subquadrupla vnitatis vnius, quæ in infinitum producta, collectisque omnibus simul partibus trientem efficit vnitatis vnius, polygono octogono hic adsumpto addendus. propterea erit valor spatij spiralis LMNPTV $26\frac{1}{3}$ & semicirculi L y Z 49. est ergo spatium ad circuli sectorem vt $26\frac{1}{3}$ ad 49.

Ostendemus etiam $26\frac{1}{3}$ constare rectangulo LV, VT, est LV, 7. & VT, 3. cuius rectangulum 21. & triente quadrati TZ, qua LV superat VT. est TZ 4. eius quadratum 16. cuius triens $5\frac{1}{3}$ qui rectangulo LV, VT additus facit $26\frac{1}{3}$.

In aliis circulationibus similis demonstratio eadem inscriptorum methodo fiet. aliam quoque dabimus, quæ in sequentibus absoluetur.

PROPOSITIO LIIII.

In prima spiralis circulatione, si à linea, quæ principium est circulationis, termino (quod etiam principium est spiralis) ad quoduis datum in spirali punctum pars aliqua accipiatur; & à principio ad datum in spirali punctum linea ducatur, super qua, vt semidiametro, circulus describatur, cuius centrum sit principium lineæ spiralis; spatium contentum inter spiralem & lineam, quæ à principio spiralis ad punctum in ea datum ducitur, tertia pars est portionis circuli descripti; quæ portio ad partes antecedentes continetur inter lineam, quæ principium est circulationis, & illam quæ à principio spiralis per datum in ea punctum ducitur.



DEMONSTRATIO.

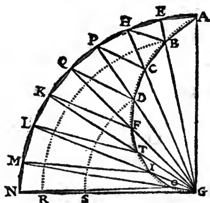
SIT pars ſpiralis primæ circulationis FHA, cuius principium ſit F; linea quæ principium eſt circulationis, ſit EF, punctum datum in ſpirali ſit A; ad quod ab F principio ſpiralis ducatur FA. ſuper linea AF, vt ſemidiametro deſcribatur circulus AELK. cuius centrum ſit F. ſit circulationis angulus EFA. Dico ſpatium AGHIFA tertiam partem eſſe ſectoris EFA. diuidatur FA in partes quatuor, & ſimiliter arcus EA in quatuor ſectores EFD, DFC, CFB, BFA. erunt in ſpirali FI, FH, FG, FA in continua proportione arithmetica, & FI minima æqualis erit exceſſui qua proximè maior ſuperat proximè minorem. arcubus ſectorum ſubtenſæ inſcribantur ED, DC, CB, BA. & in ſpirali pariter erunt ſubtenſæ FI, IH, HG, GA. ducantur tandem lineæ CG, DH, EI; erit itaque figura polygona in circulo ABCDEF, vt in ſpirali AGHIF. triangula autem ſingula in circuli ſectoribus ſint vnitatum 4. quia linea FA in partes quatuor ſecta eſt, erit tota figura polygona vnitatum 16. cæteráque, vt in diagrammate ſubiecto ſe habebunt.

BFA	4	Triangulorum IV valor.	*	*	Triangula tria ablata à primis.	BAF	4	Triágula reſidua ablatis ſecundis tribus.	BAG	1	Quadrantes.	Triangula IV ab antecedentibus ablata.
CFB	4		BCG	1		CGF	3		CGH	1·2		
DFC	4		CDH	2		DHF	2		DHI	1·2		
EFD	4		DEI	3		EIF	1		EIF	1		
Summa 16			Summa 6						Summa 5			

Summa itaque trium triangulorum à primis ablatorum & quatuor poſtremorum eſt 11; polygonum circulo inſcriptum eſt 16. à quo dempta ſumma triangulorum VII, reſiduum erit polygonum ſpirali inſcriptum 5. eſt ergo in polygono quatuor laterum, ratio polygoni ſpiralis, ad polygonum circuli; vt 5, ad 16.

Duplicetur polygonum & in octo ſectores diuidatur portio circuli ductis GE, GH, GP, GQ, GK, GL, GM, GN. & ſubtenſæ ductæ ſint AE, EH, HP, PQ, QK, KL, LM, MN. in ſpirali

etiam intelligantur ductæ AB, BC, CD, DF, FT, TI, IO, OG. Sitque vnumquodque triangulorum polygoni 8, quia linea GA diuisa est in partes 8. omnia se habebunt vt in diagrammate sequenti.



AGE	8	Triangula VIII in VIII sectoribus.	*	*	Triangula VII ablata à primis.	EAG	8	Triangula VIII residua ablatis VII antecedentibus à primis.	EAB	1	Partes octauæ.	Triangula VIII ab antecedentibus ablata.
EGH	8		EHB	1		HBG	7		HBC	1-6		
HGP	8		HPC	2		PCG	6		PCD	2-2		
PGQ	8		PQD	3		QDG	5		QDF	2-4		
QGK	8		QKF	4		KFG	4		KFT	2-4		
KGL	8		KLT	5		LTG	3		LTI	2-2		
LGM	8		LMI	6		MIG	2		MIO	1-6		
MGN	8		MNO	7		NOG	1		NOG	1		
Summa 64			Summa 28						Summa 15.			

Polygonum itaque in circulo est 64. summa verò triangulorum xv est 43, quæ cùm ablata fuerit à polygono in circulo, residuum erit polygonum in spirali, nempe 21; quare in polygono laterum octo, ratio polygoni spiralis ad polygonum circuli est, vt 21 ad 64. quoniam verò hic duplicatus est numerus laterum, quadruplicati sunt numeri: diuisis igitur huius octogoni in spirali & circulo valoribus per 4 reducentur ad numeros qui in tetragono. erit ergo polygonum spiralis $5\frac{1}{4}$ polygonum circuli 16. quare ille ad hunc erit, vt $5\frac{1}{4}$ ad 16. sed in tetragono erat vt 5 ad

16. creuit itaque duplicato polygono quadrante vnitatis vnius; & in sequentibus polygonis laterum numero duplicatis, subquadrupla proportione quadrantis erescit ratio 5 ad 16. quæ simul iunctæ omnes partes quadrantis trientem efficiunt vnitatis vnius, quare ratio spatij totius ABCDFOGA ad totum sectorem A G N, est vt 21 $\frac{1}{3}$ ad 64. id est vt vnum ad tria. Quod erat demonstrandum.

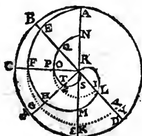
Idem demonstrabitur, quodcumque ad punctum ducentur circuli OG, NH, MI in prima figura; eritque spatium spiralis IF triens sectoris MFI. Spatium HIFH triens sectoris NFH; spatium GHIFG triens sectoris OFG. & in secunda figura DIOG D triens erit sectoris SGD; & spatium BTGD triens sectoris R G B.

PROPOSITIO LV.

Si in prima circulationis spirali RLMFA accipiatur vna semidiameter, veluti RL; cuius terminorum alter L per LMFA, seruata totius RL ad principium R directione, reuoluatur; alter eius terminus spiralis partem RSTOQ describet æqualem & similem spiralis parti RLM.

DEMONSTRATIO.

DIVIDATVR semicirculus BCD in sectores quatuor æquales BRC, CRδ, δRε, εRD. ductis BR, CR, δR, εR, DR, quæ spiralem secent in punctis E, F, H, M, L. à quibus in spirali versus principium R, accipiantur in prædictis semidiametris rectæ M S, H T, FO, EQ æquales singulæ semidiametro RL. terminus alter semidiametrorum RL, RM, RH, RF, RE, est in spirali RLMHFE, & sese illæ æqualiter excedunt; ergo & earum excessus æqualiter etiam crescent, & æqualiter sese superabunt. excessus autem rectæ RM supra RL, ablata ab RM recta MS quæ æqualis est RL, est recta RS. & qua RH excedit RL est RT. & deinceps excessus sunt RO, RQ; æqualiter ergo sese superant RS, RT, RO,



RQ; ſed hæ lineæ æquales angulos comprehendunt; ergo puncta RSTOQ ſunt in ſpirali.

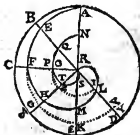
Æqualibus quoque magnitudinibus per æquales angulos terminus R recedit à centro circuli, ac terminus alter L; quare ſpiralis RLM æqualis & ſimilis erit ſpirali RSTOQ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LVI.

In prima circulatione, ſpatium contentum linea ſpirali (quæ ſit minor tota circulatione, quæque non habeat terminum principium lineæ ſpiralis) & rectis lineis à terminis eius ad principium ſpiralis ductis; ad ſectorem habentem ſemidiametrum æqualem maiori earum, quæ à terminis ad principium ſpiralis ductæ ſunt, circumferentiam verò inter dictas lineas interiectam ad partes lineæ ſpiralis, eam proportionem habet, quam vtraque hæc rectangulum contentum rectis lineis, quæ à terminis ipſius ſpiralis principium ducuntur, & tertia pars quadrati eius lineæ, qua maior dictarum linearum minorem excedit, ad quadratum maioris earumdem.

DEMONSTRATIO.

SIT prima ſpiralis circulatio RMFA. Spatium contentum linea ſpirali LMF, (quæ ſit tota circulatione minor & cuius terminus non ſit R lineæ principium) & lineis RL, RF ductis ab F & L ad R, principium. maior ipſarum linearum ſit RF, & circulus ſemidiametro RF deſcribatur FGKX; minor verò ſit RL, quæ fiat ſemidiameter circuli OZL. Sit ſector FRX, cuius circumferentia inter dictas lineas RL, RF ad D & C productas interiicitur ad partes lineæ ſpiralis LMF. dico, quòd ſpatium contentum ſpirali LMHF & rectis RF, RL eſt ad ſectorem FRX, vt hæc ſimul, rectangulum RF, RL comprehenſum, ſiue rectangulum RFO, & triens quadrati RO (lineæ ſcilicet, qua RF excedit RL, ſiue FO) ad quadratum RF.



Reuoluta intelligatur recta RL, ſeruatâ ad R directione, vt in

in antecedenti demonſtrauimus, deſcribet termino R ſpiralis partem R S T O Q, æqualem & ſimilem ſpiralis primo poſitæ parti R L M. generat itaque linea R L ſic reuoluta ſpatium inter duas ſpirales R S T O, L M H F & rectas O F, R L. Comparabitur autem illud ſpatium ad ſectorem F R X * per hæc ſimul, quadrata omnia reuolutæ lineæ R L, hoc eſt quadrata R L, S M, T H, O F, & omnia rectangula bis ſumpta R S M, R T H, R O F, ad omnia quadrata R F, R G, R K, R X. Sunt autem rectangula R S M, R T H, R O F bis ſumpta æqualia quatuor rectangulis R O F ſemel ſumptis, cùm bis ſumptæ R S, R T, R O æquales ſint quatuor R O; comparabitur ergo ſpatium inter ſpirales comprehenſum R L M F O T ad ſectorem F R X, per hæc omnia quadrata R L, & omnia rectangula R O F, ad omnia quadrata R F, ſeu per omnia rectangula R F O, ad omnia quadrata R F. vt autem omnia ad omnia, ita vnum ad vnum; erit itaque ſpatium R L M F O T ad ſectorem F R X, vt rectangulum R F O ad quadratum R F. * Prop. 49.

Sed ſpatium ſub ſpirali R S T O & R O contentum, quod triens ſit ſectoris O R I circuli O Z I per punctum O tranſeuntis, oſtenſum eſt. Comparabitur itaque ſpatium ad ſectorem F R X per trientem quadrati O R ad quadratum F R; cùm ſit, vt quadratum R O ad quadratum F R, ita ſector O R I ad ſectorem F R X. totum itaque ſpatium ſpirali L M H F & lineis R F, R L comprehenſum eſt ad ſectorem F R X, vt hæc ſimul rectangulum ſub R L, R F, id eſt rectangulum R F O & triens quadrati lineæ R O, qua maior R F minorem R L excedit, ad quadratum R F. Quod erat demonſtrandum.

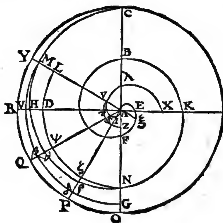
Eadem erit per totam primam circulationem demonſtratio.

PROPOSITIO LVII.

Sit ſpiralis primæ circulationis A E F B, & prima linea A B. ſpiralis verò ſecundæ circulationis ſit B K N H C. In hac ſecunda circulatione accipiatur ſemidiameter A N, cuius punctum N ſit in ſpirali, & ſeruata totius A N directione ad A, reuoluatur per ſpiralis partem N p θ H M. dico, quòd altero eius termino A deſcribitur ſpiralis A I S T V

M

æqualis & similis parti spiralis primæ circulationis AEξ æqualibus existentibus angulis FAV, λAξ.



DEMONSTRATIO.

DIVIDATVR sector yAO in sectores quatuor yAR, RAQ, QAP, PAO, ductis Ay, AR, AQ, AP, AO, quæ spiralem secant in punctis Nρθ HM, ideo æqualiter sese superant AN, Aρ, Aθ, AH, AM. semidiametro AN fiant æquales ρI, θS, HT, MV. æqualiter ergo sese superant AI, AS, AT, AV, & æquales angulos comprehendunt. quapropter sunt in spirali. secundæ verò circulationis spiralis semidiametro primæ AB æqualem addit BC. punctum itaque A rectæ AN secundùm hypothesim reuolutum sub æqualibus angulis recedit à puncto A partibus sese æqualiter superantibus, & per totam circulationem percurrit lineam æqualem lineæ AB. quæ semidiameter est circuli primi. quapropter AISTV pars est spiralis, æqualis parti spiralis primæ circulationis AEξ. æqualibus existentibus angulis FAV, λAξ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LVIII.

Verbis propositionis 53. hic applicatis. Dico in secunda circulatione spi-

tium à spirali N ρ θ H M & lineis AN, AM comprehensum, esse ad sectorem MAG, vt hæc simul, MAL rectangulum & triens quadrati LM, ad AM quadratum.

DEMONSTRATIO.

GENERAT itaque linea AN reuoluta spatium inter duas spirales AISTv, & N ρ θ HM, duásque rectas AM, AN. comparabitur itaque spatium, illud ad sectorem MAO circuli MVG, cuius semidiameter AM, per hæc simul; quadrata omnia linearum AN, Iρ, Sθ, TH, vM, quæ omnes inter se sunt æquales, & omnia rectangula bis sumpta AIρ, ASθ, ATH, AVM, ad omnia quadrata AG, Aδ, Aβ, AV, AM, & quotquot æquè multiplicia sumentur. Describantur circulus LDN semidiametro AN, & super Av vt semidiametro circulus vZ. vid. figura præced. p 90.

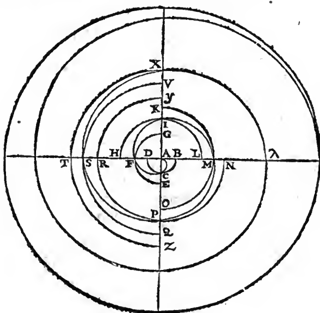
Quoniam spiralis transit per puncta N ρ θ H M, & æquales sunt ex centro circuli quinque AN, Aζ, Aψ, AD, AL, quinque rectis AN, Iρ, Sθ, TH, VM. erunt propterea etiam æquales AI, AS, AT, Av, totidem eodémque ordine singulæ singulis ζρ, ψθ, DH, LM. erunt ergo rectangula Aζρ, Aψθ, ADH, ALM, æqualia rectangulis AIρ, ASθ, ATH, AvM. & bis sumpta bis sumptis æqualia. Æquales porro sunt lineæ ML, HD, θψ, ρζ, totidem GN, δρ, βθ, VH, & simul sumptæ æquales quinque NG, ζδ, ψβ, DV, LM. Quare adsumpta communi altitudine AL, omnia rectangula Aζρ, Aψθ, ADH, ALM, bis sumpta æqualia sunt semel sumptis ALM, ADV, Aψβ, Aζδ, ANG, quæ inter se æqualia sunt. Quare comparabitur spatium inter spirales comprehensum ad sectorem MAG, per omnia quadrata AL, & per omnia rectangula ALM; sed vt omnia ad omnia æquè multiplicia, ita vnum ad vnum. erit ergo spatium MvSANθ ad sectorem MAG, vt hæc simul, quadratum AL & rectangulum ALM, hoc est rectangulum MAL, ad quadratum AM.

Spatium verò residuum AISTVA triens est sectoris VAZ; & comparabitur ad sectorem MAG, per trientem quadrati lineæ VA, seu æqualis ML, qua AM excedit AN, ad quadratum AM. Totum ergo spatium spirali MθN, & rectis AN AM comprehensum est ad sectorem MAG, vt hæc simul rectangulum sub MA, AN

ſeu MAL & triens quadrati ML, ad quadratum AM. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LIX.

Si in linea ſpirali, in quacumque circulatione deſcripta duo puncta ſumantur, quæ non ſint ipſius termini: ab his autem punctis iungantur rectæ lineæ ad principium lineæ ſpiralis. & centro quidem lineæ ſpiralis principio, interuallo autem dictis lineis circuli deſcribantur; ſpatium contentum circumferentia maioris circuli, quæ inter lineas rectas intercipitur; & linea ſpirali interiecta inter eaſdem & recta linea producta, eam habebit proportionem ad ſpatium contentum minoris circuli circumferentia, & eadem linea ſpirali & recta terminos ipſarum iungente; quam ſemidiameter minoris circuli vnà cum duabus tertiis exceſſus (quo ſemidiameter circuli maioris excedit ſemidiametrum minoris) habet ad ſemidiametrum minoris vnà cum tertia parte eiuſdem exceſſus.



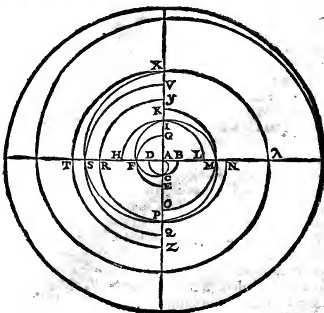
DEMONSTRATIO.

SINT in ſpirali duo puncta accepta P,X, quæ non ſint in termino A & ab illis ad A ducantur PA, XA. & centro A, interuallis verò XA, PA deſcribantur circuli XTZ, yRP. Dico, quòd ſpatium XTZPS contentum recta PZ (quæ pars eſt productæ AP) circumferentia maioris circuli XTZ & ſpirali, quæ inter lineas XA, PA intercipiuntur; ad ſpatium PSX yRP contentum recta Xy, circumferentia minoris circuli PRy & eadem ſpirali, quæ inter eaſdem XA, ZA interiiciuntur, eam habet rationem, quam AP ſemidiameter minoris circuli vnà cum duabus tertiis PZ rectæ (qua maior ſemidiameter minorem excedit) habet ad AP minorem ſemidiametrum vnà cum tertia parte eiuſdem exceſſus PZ.

Oſtenſum eſt enim ſpatium PSXAP, eſſe ad ſectorem, qui hic eſt ſemicirculus, ZAXT, vt rectangulum ZAP & triens quadrati PZ ſimul ad quadratum AZ; ſed ſector ZAXT, ſe habet ad ſectorem PAyR, vt quadratum AZ ad quadratum AP. quare ſector ZAXT erit ad reſiduum ſpatium PSXyR, vt quadratum AZ, ad vtraque hæc rectangulũ APZ & trientem quadrati PZ. Sed ſector ZAXT, ſe habet ad ſpatium PZTXyR, vt quadratum AZ ad hæc ſimul rectangulum APZ bis & quadratum PZ. ergo totum ſpatium ſe habet ad partem PSXyR, vt rectangulum APZ bis & quadratum PZ ſimul ſumpta ad rectangulum APZ vnà cum triente quadrati PZ. ablato itaque ſpatio PSXyR, à ſpatio PZTXyR, reſiduum eſt ſpatium XTZPSX. & ex rectangulo APZ bis & quadrato PZ cùm abſtulerimus rectangulum APZ cum triente quadrati PZ, reſiduum erit rectangulum APZ & duo trientes quadrati PZ. Spatium ergo XTZPSX inter ſpiralem & maiorem circulum interceptum & linea PZ, eſt ad ſpatium PSXyR, inter minorem circulum & eandem ſpiralem interceptum ac linea Xy; vt rectangulum APZ cum duobus trientibus quadrati PZ, ad rectangulum APZ cum triente quadrati PZ. id eſt, vt AP cum duabus tertiis PZ, ad eandem AP cum vna tertia PZ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LX.

Spatiorum ſibi inuicem circumpoſitorum, ſeu partium annularium, ſimiles partes à ſpirali linea ita diuiduntur, vt pars circulo maiori adiacens ſuperet partem minori circulo adiacentem, magnitudine quæ ſe habet ad annularem partem, vt triens quadrati differentiæ ſemidiametrorum circulorum, qui gnomonem ſeu annularem partem comprehendunt, ad rectangulum ſub ſemidiametro circuli minoris & differentia ambarum ſemidiametrorum comprehenſum. ſeu vt triens differentiæ ſemidiametrorum ad minorem ipſarum.



DEMONSTRATIO.

MANIFESTVM eſt illud ex antecedenti. Sit BCD circulus, & ſint ſpatiorum annulatium ſibi circumpoſitorum partes ſimiles. nempe quadrantes EF, HI, KM, N P, Q S, T X, & circulorum, qui annulares partes comprehendunt, ſemidiame-

tri ſeſe exceſſu ſuperent, qui primi circuli BCD ſemidiametro ſit æqualis. ſingulos autem gnomonum quadrantes diuidat ſpiralis per circuli minoris & maioris terminum tranſeundo, hoc eſt per puncta CF, per quæ ad A principium ductæ ECA, FA lineæ rectæ annularem partem, qui quadrans hic eſt, comprehendunt: ſicque deinceps per puncta FI. Dico ſpatium CFE maius eſſe ſpatio FCD magnitudine quæ ſe habet ad gnomonem CDFE, vt triens quadrati CE, ad rectangulum ECA, id eſt vt triens EC, differentiæ ſemidiametrorum AC, AE ad AC minorem ipſarum.

Eſt enim vt in antecedenti tota pars annularis CDFE ad ſpatium DCF; vt ACE rectangulum bis, & quadratum CE; ad rectangulum ACE & trientem quadrati CE. & permutando gnomon CDFF erit ad bis rectangulum ACE & quadratum CE, vt ſpatium DCF, ad rectangulum ACE & trientem quadrati CE. erit per conuerſionem rationis vt ſpatium CFE, ad rectangulum ACE cum duobus trientibus quadrati CE; ita ſpatium FCD ad rectangulum ACE cum triente quadrati CE, & permutando, vt ſpatium CFE, ad ſpatium DCF; ita rectangulum ACE cum duabus tertiis quadrati CE, ad rectangulum ACE cum vna tertia quadrati CE. excedit ergo CFE ſpatium trilineum, alterum adiacens FCD magnitudine, quæ ſe habet ad annularem CDFE, vt triens quadrati CE ad rectangulum ACE; ſeu vt triens EC differentiæ ſemidiametrorum, ad CA minorem ipſarum. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXI.

Spatia inter circulos ſeſe æqualiter & primi circuli ſemidiametro, penes ſemidiametros excedentes comprehenſa ſub æqualibus angulis, à ſpirali ab vno termino ad alium, tanquam à diagonali, ita ſecantur; vt circulo maiori adiacens ſpatium trientes duos vnitatis vnius accipiat, minori verò adiacens trientem vnum, & ſeſe æqualiter ſuperant in omnibus continua ſerie annularibus ſpatia minoribus circulis adiacentia; atque etiam maioribus adiacentia circulis ſeſe æqualiter excedunt.

DEMONSTRATIO.

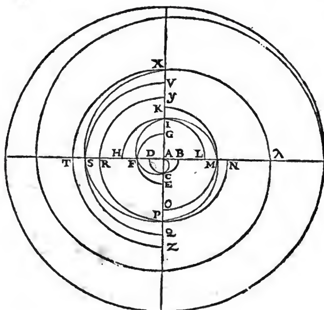
SINT circa BCD circulum, cuius ſemidiameter AD, alij circuli ſeſe æqualiter penes ſemidiametros ſuperantes AF, AH, AR, AS, AT. ſitque exceſſus, quo ſe ſe excedunt æqualis AD ſemidiametro primi circuli. inter circulos illos ſint ſpatia ABC, FDCE, FHIG, IKML, MNOP & ſequentia ſub æqualibus angulis, hic rectis, comprehenſa. & ſecentur à ſpirali ab vno termino ad alium, tanquam à diagonali. hoc eſt ſector ABC à ſpirali AC; annularis pars FDCE, à ſpirali CF. annularis FHI G à ſpirali FI. & ſic deinceps. Dico quòd ſpatium ABC in ſectore maiori circulo BC adiacens trientes duos vnitatis vnius accipit; minori verò adiacens, hoc eſt AC adiacens puncto C, quod principij & primi omnium circuli rationem habet, vnum trientem accipit. In annularibus pariter, dico quòd ſpatium CFE maiori circulo FE adiacens trientes duos vnitatis vnius accipit; ſpatium verò DCF minori circulo DC adiacens vnum trientem accipit.

Demonſtratum eſt ſpatium AC in ſectore ABC, trientem vnum eſſe ipſius ſectoris. Cùm igitur ſector erit vnitas erit AC triens, & ACB duo trientes.

Demonſtratum eſt quòd ſpatium CFE ſuperat ſpatium DCF magnitudine quæ reſpondet trienti quadrati FD. cùm ergo FD, erit vnitas, FCE illius vnitatis trientes duos accipiet, DCF verò vnum. eſt verò annularis CDFE ad ſectorem ABC vt 3. ad 1. CD FE autem ſecatur à ſpirali CF & triente vnitatis vnius maius eſt ſpatiũ CFE ſpatio DCF, ergo CFE erit $1\frac{2}{3}$ & DCF $1\frac{1}{3}$ idémque erit in cæteris annularibus æquali vbique exiſtente ſemidiametrorum differentia.

Cùm verò gnomonum quadrato circumpoſitorum rationem habeant annulares partes, vt poſtea oſtendemus, ipſæ æqualiter ſe ſe ſuperant, & maioribus ſpatiis partes æquales vnitatis vnius in omnibus annularibus adduntur; minoribus verò ſpatiis pars æqualis vnitatis vnius in omnibus gnomonibus additur, æqualiter ſeſe etiam ſuperabunt ſpatia maiora in ſerie continua ſumpta; atque etiam minora ſimiliter accepta ſe ſe æqualiter ſuperabunt. Æqualiter itaque ſe ſe ſuperabunt ACB, CFE, HKF maiora

maiora ſpatia. æqualiter etiam AG, DGF, IFG minora. Quod erat demonſtrandum.



Cùm ergo erit DA, 1. ſequentia ſic ſe habebunt, vt in diagrammate appoſito.

Semidiametri.		Quadrata.	Sector		Gnomones.			Spatia adiacentia circulis minoribus.		Spatia adiacentia circulis maioribus.
AD	1	1	ABC	1	AC	0	$\frac{1}{3}$	ACB	0	$\frac{2}{3}$
AF	2	4	FDCE	3	DCF	1.	$\frac{1}{3}$	CFE	1	$\frac{2}{3}$
AH	3	9	FHIG	5	GFI	2	$\frac{1}{3}$	HIF	2.	$\frac{2}{3}$
AR	4	16	IKML	7	MIL	3.	$\frac{1}{3}$	KMI	3.	$\frac{2}{3}$
AS	5	25	MNPO	9	OMP	4	$\frac{1}{3}$	MPN	4	$\frac{2}{3}$
AT	6	36	PQSR	11	RPS	5.	$\frac{1}{3}$	PSQ	5.	$\frac{2}{3}$
			STXV	13	XSV	6	$\frac{1}{3}$	SXT	6	$\frac{2}{3}$

Se igitur habent ad inuicem ſpatia adiacentia circulis, vt in diagrammate.

Eadem demonſtratione probabitur in ſecunda circulatione & ſequentibus, ſpatium contentum inter circulum tranſeuntem

N

per principium circulationis & spiralem, minus esse spatio contento inter spiralem & circulum per finem circulationis transeuntem, triente spatij circulationis primæ; hoc est, spatium B IMPCBHSFB, minus esse, quàm spatium BIMPCOZGC, spatio AERφBA primæ circulat. est enim spatium spirali secundæ circulationis BIMPC & linea secunda BC contentum, ad circulum secundum CO, vt rectangulum ACB & triens quadrati BC ad quadratum AC. & inuertendo circulus secundus CO est ad spatium vt quadratum AC, ad rectangul. ACB & trientem quadrati BC. diuidendo erit vt circulus CO ad spatium inter ipsum & spiralem comprehensum, ita quadratum AC, ad rectangulum ABC & duos trientes quadrati BC. Sed est circulus CO ad gnomonem inter circulos COBH, vt quadratum AC, ad rectangulum ABC bis & quadratum BC. erit ergo gnomon ad spatium inter CO circulum & spiralem contentum, vt rectangulum ABC bis & quadratum BC, ad rectangulum ABC & duos trientes quadrati BC. erit ergo per conuersionem rationis, vt spatium inter spiralem & minorem circulum, quo gnomon excedit spatium inter spiralem & maiorem circulum comprehensum, ad hoc ipsum spatium; ita rectangulum ABC & triens quadrati BC, ad rectangulum ABC & duos trientes quadrati BC. Superat ergo spatium adiacens circulo maiori, illud quod minori adiacet, magnitudine quæ se habet ad circulum CO, vt triens quadrati BC ad quadratum AC. id est, vt spatium prima spirali circulatione AERφB & linea prima AB comprehensum.

In tertia pariter circulatione spatium CXVTDCOZG minus esse ostendetur, quàm spatium CXVTD spirali & circulo AD comprehensum, toto spatio primæ circulationis. Idem in sequentibus circulationibus demonstrabitur.

His addemus. Contentum sub primo quadrante AC circulationis spiralis, tertia pars est BAC, quadrantis circuli, qui per terminum quadrantis circulationis transit. & est contentum sub spiralis quadrante primo, ad quadrantem illius circuli; vt spatium contentum prima circulatione spiralis & prima linea, ad circulum primum.

Secundus quadrans primæ circulationis spiralis est ad quadrantem circuli, qui per terminum secundi quadrantis circula-

tionis tranſit, vt 7. ad 12. & ita ſe habet contentum ſub ſecunda ſpiralis circulatione, & linea ſecunda, ad circulum ſecundum. eſt enim ſpatium FAC ad ſectorem FAE, vt hæc ſimul, rectangulum AFD, & triens quadrati FD, ad quadratum FA. eadémque eſt proportio FA ad AD, ac λA ſemidiameter circuli, qui per terminum ſecundæ circulationis tranſit, ad AM ſemidiametrum circuli, qui per eiuſdem principium tranſit. ergo & horum ſimul, rectanguli AλM & trientis quadrati λM ad quadratum λA eadem ratio erit; ac rectanguli AFD & trientis quadrati DF ad quadratum AF. Sed eſt, vt hæc ſimul rectangulum AλM & triens quadrati λM, ad quadratum Aλ; ita ſpatium ſpirali ſecundæ circulationis & linea ſecunda comprehenſum, ad circulum ſecundum cuius ſemidiameter Aλ. ſed eſt ſecundæ circulationis ſpatium, ad circulum ſecundum vt 7 ad 12. itaque & ſpatium FAC erit ad quadrantem circuli FAE vt 7 ad 12.

Tertij quadrantis ſpatium IAF, ad ſectorem IAH eadem erit proportio; ac ſpatij circulationis tertiæ ad circulum tertium. habet enim rationem circuli ſecundi ſemidiameter ad tertij ſemidiametrum eandem, ac 2 ad 3. quam etiam habet AG ad AI.

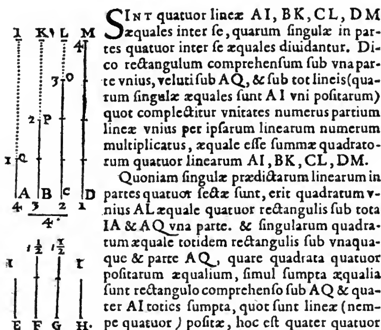
Quarti quadrantis ſpatium MIA eſt ad ſectorem MAK; vt quartæ circulationis ſpatium, ad circulum quartum; eſt enim tertij circuli ſemidiam. ad quarti ſemidiametrum, vt tria ad quatuor, quam habet etiam AL ad AM.

Secundæ verò circulationis quadrans primus MAP eſt ad ſectorem NAP, vt quintæ circulationis ſpatium, ad circulum quintum. eſt enim circuli quarti ſemidiameter, ad quinti ſemidiametrum vt quatuor ad quinque, vt eſt etiam AP ad PQ. ſicque deinceps quadrantes ſequentes ſe habebunt ad circulationes ſequentes.

PROPOSITIO LXII.

Si lineæ quotlibet inter ſe æquales ponantur, & ſingulæ in eaſdem partes diuidantur æquales, rectangulum comprehenſum ſub vna parte vnius prædictarum linearum, & ſub tot lineis (quarum ſingulæ vni poſitarum æquales ſunt) quot complectitur vnitates numerus partium lineæ vnius, per ipſarum linearum numerum multiplicatus, æquale eſt ſummæ quadratorum linearum illarum æqualium.

DEMONSTRATIO.



SINT quatuor lineæ AI, BK, CL, DM æquales inter ſe, quarum ſingulæ in partes quatuor inter ſe æquales diuidantur. Dico rectangulum comprehenſum ſub vna parte vnius, veluti ſub AQ, & ſub tot lineis (quarum fingulæ æquales ſunt AI vni poſitarum) quot complectitur vnitates numerus partium lineæ vnius per ipſarum linearum numerum multiplicatus, æquale eſſe ſummæ quadratorum quatuor linearum AI, BK, CL, DM.

Quoniam ſingulæ prædictarum linearum in partes quatuor ſectæ ſunt, erit quadratum vnius AL æquale quatuor rectangulis ſub tota IA & AQ vna parte. & ſingularum quadratum æquale totidem rectangulis ſub vnaquaque & parte AQ, quare quadrata quatuor poſitarum æqualium, ſimul ſumpta æqualia ſunt rectangulo comprehenſo ſub AQ & quater AI toties ſumpta, quot ſunt lineæ (nempe quatuor) poſitæ, hoc eſt quater quatuor ſeu XVI. Sed quater AI toties ſumpta, quot ſunt lineæ poſitæ, componitur ex numero partium lineæ vnius (4. ſcilicet) per numerum linearum (nempe per 4.) multiplicato. ergo rectangulum ſub AQ parte vnius lineæ, & ſub lineis XVI. quæ faciunt longitudinem 64. quarum vnaquæque æqualis eſt vni poſitarum, æquale eſt ſummæ quadratorum linearum quatuor poſitarum. Quod erat demonſtrandum.

Si ſint quatuor quarum vnaquæque in partes quinque diuiſa ſit, rectangulum ſub vna parte vnius, & linearum numero 20. (qui ex multiplicatione quinque partium vnius lineæ per poſitarum numerum 4. fit) colligitur 100. nam vnaquæque linea eſt vnitatum 5. quare 20 lineæ longitudinem faciunt 100. & latus alterum eſt vnitas. quadratum verò vniuſcuiuſque eſt 25. quod quater ſumptum, quia ſunt lineæ quatuor, efficit 100. æqualem ſummam rectangulo ſub vna parte vnius & lineis viginti.

PROPOSITIO LXIII.

Vid. figura præced. p. 100.

Iisdem positis. Rectangulum sub A Q vna parte vnius lineæ & sub omnibus lineis inter se æqualibus positis, AI, BK, CL, DM, pars est summæ quadratorum positarum linearum; quæ denominatorem habet numerum partium vnius positarum linearum.

DEMONSTRATIO.

SVMMA quadratorum linearum positarum AI, BK, CL, DM æquale est rectangulo sub AQ parte vna, & sub tot lineis (nempe 16) inter se & vni positarum æqualibus, quot sunt vnitates in numero (16) producto per multiplicationem (4) numeri partium vnius lineæ, & (4) numeri positarum linearum. Hoc ergo rectangulum toties continet rectangulum sub parte vna & lineis positis, quot sunt partes in vna linea, quarum numerus numerum linearum multiplicat. quare & rectangulum sub AQ parte vna vnius lineæ, & lineis positis AI, BK, CL, DM, pars est summæ quadratorum harum linearum, quæ denominatorem habet numerum partium vnius positarum linearum. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXIV.

Si quotlibet magnitudines in progressione arithmetica ponantur, quarum minima excessui sit æqualis, summa in progressione positarum semissis est summæ totidem numero, plus vna, linearum, quæ singulæ maximæ æquales sint.

DEMONSTRATIO.

SINT quatuor lineæ, AQ, BP, CO, DM, in progressione arithmetica, quarum minima sit AQ æqualis excessui. Sint etiam quatuor maximæ DM æquales AI, BK, CL, DM. Dico, quòd summa quatuor AQ, BP, CO, DM semissis est summæ totidem numero maximæ æqualium quatuor videlicet AI, BK, CL, DM, vnúsque insuper DM; seu quòd summa quatuor Vid. figura præced. p. 100.

AQ, BP, CO, DM, semissis est quinque linearum, quarum singulæ æquales sint DM.

[Cùm enim excessus positus sit æqualis minimæ AQ, & CO proximè minor sit à maxima DM, erit differentia ambarum æqualis AQ. bis itaque sumptæ AQ, BP, CO, æquales sunt tribus AI, BK, CL, quæ AQ, BP, CO subduplæ propterea erunt trium AI, BK, CL. sed DM etiam subdupla est duarum DM. quare quatuor AQ, BP, CO, DM. subduplæ erunt trium AI, BK, CL, & duarum DM, hoc est quatuor AI, BK, CL, DM plus vna DM. propterea summa quatuor positarum AQ, BP, CO, DM semissis est summæ totidem quatuor numero, plus vna, hoc est quinque linearum quæ singulæ sunt maximæ æquales. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

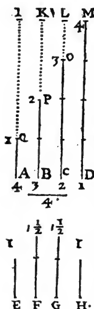
Rectangulum igitur sub minima & omnibus in progressione positis, subduplum est rectanguli sub minima, & totidem numero, plus vna, lineis inter se & maximæ æqualibus contenti. Et quando rectangulum hocce sub minima & totidem numero, plus vna, lineis inter se & maximæ æqualibus contentum, erit vnitas; rectangulum sub minima & omnibus in progressione positis semissis illius erit.

PROPOSITIO LXV.

Si quotlibet magnitudines ponantur in progressione arithmetica & minimæ sit excessus æqualis; rectangulum sub minima & omnibus, pars est quadratorum totidem, plus vnius, linearum inter se & maximæ æqualium; quæ pars denominatorem habet duplum numeri linearum in progressione positarum.

DEMONSTRATIO.

SINT in progressione arithmetica quatuor AQ, BP, CL, DM; & minimæ AQ sit excessus æqualis, & sint totidem plus vna inter se & maximæ æquales AI, BK, CL, DM plus DM. Dico, quòd rectangulum sub minima AQ; & omnibus AQ, BP, CL, DM, pars est quadratorum totidem, plus vnius, linearum inter se & maximæ æqualium, hoc est quinque linearum



AI, BK, CL, DM & DM, quæ pars denominatorem habet 8, duplum quaternarij numeri linearum in progressione positarum.

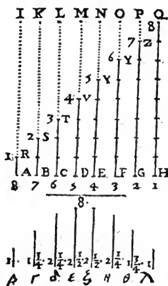
Cùm enim prop. præced. ostensæ sint lineæ AQ, BP, CO, DM subduplas esse, linearum quinque AI, BK, CL, D M & D M; erit rectangulum sub AQ minima & omnibus AQ, BP, CO, DM, subduplum rectanguli sub A Q, & quinque AI, BK, CL, DM & DM. est autem summa quadratorum quinque linearum AI, BK, &c. æqualis rectangulo sub AQ minima, seu parte vna vnius linearum, & sub tot lineis, quot complectitur vnitates numerus partium lineæ maximæ, nempe 4. per ipsarum linearum inter se & maximæ æqualium numerum multiplicatus, nempe per 5. vt prop. 62. ostensum est. quare rectangulum sub vna parte AQ, & sub viginti lineis inter se & maximæ DM æqualibus æquale est quinque linearum AI, BK, CL, DM, & DM quadratis simul sumptis. Sed rectangulum sub AQ, & quinque AI, BK, CL, DM, & DM, pars est rectanguli sub AQ minima & viginti lineis inter se & maximæ æqualibus, quæ denominatorem habet numerum linearum in progressione positarum (qui numerus semper æqualis est numero partium maximæ lineæ progressionis) multiplicat enim hic partium lineæ maximæ numerus numerum linearum positarum æqualium inter se & maximæ; numeratorem verò vnitatem, quia sub vna parte DM, comprehenditur rectangulum. propterea rectangulum sub AQ & quinque AI, BK, CL, DM & DM subquadruplum erit rectanguli sub AQ & viginti lineis supradictis, id est summæ quadratorum quinque linearum AI, BK, CL, DM, & DM. sed rectangulum sub AQ minima & omnibus quatuor AQ, BP, CO, DM, subduplum est rectanguli sub AQ & quinque AI, BK, CL, DM & DM. quare rectangulum sub AQ minima & quatuor AQ, BP, CO, DM, suboctuplum erit summæ quadratorum quinque linearum AI, BK, CL, DM & DM. atque adeo erit rectangulum illud summæ quadratorum vna

octaua pars, quæ denominatorem habet 8. duplum numeri linearum in progressione positarum, nempe 4. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVI.

Duplicato numero linearum progressionis, octuplicatur summa quadratorum totidem linearum inter se & maximæ æqualium. Et rectangulum sub minima & omnibus progressionis lineis, pars est summæ quadratorum totidem, plus vnius, linearum inter se & maximæ æqualium, quæ denominatorem habet duplum numeri linearum numeri progressionis; & duplum etiam denominatoris antecedentis rectanguli, sub minima & omnibus progressionis antecedentis, numero linearum subduplæ, comprehensi.

DEMONSTRATIO.



SINT AR, BS, CT, DV, EX, FY, GZ, HQ in progressione arithmetica, numero 8. duplo linearum antecedentis progressionis numeri. Dico summam quadratorum octo linearum inter se & maximæ æqualium, octuplam esse summæ quadratorum quatuor linearum inter se & maximæ æqualium in antecedenti progressione.

Cùm enim duplus sit numerus partium vniuscuiusque lineæ AR, BK, &c. erit quadratum numeri singularum AR, AK quadruplum quadrati singularum in antecedenti AI, BK, CL; quatuor itaque quadratorum AI, BK, CL, DM, in antecedenti progressione acceptorum, quadrupla erunt quatuor quadrata linearum AI, BK, CL, DM, in sequenti progressione. sed octo

sunt

ſunt in ſequenti progreſſione quadrata totidem linearum; quare bis quadrupla erunt, id eſt octupla numero, quadratorum quatuor antecedentis progreſſionis.

Alia pars propoſitionis ſic demonſtrabitur.

Sint AR, BS, CT, DV, EX, FY, GZ, HQ in progreſſione arithmetica. oſtenſum eſt lineas illas omnes ſimul ſumptas, æquales eſſe ſemiſſi nouem linearum inter ſe & maximæ æqualium, hoc eſt ſemiſſi linearum AI, BK, CL, DM, EN, FO, GP, HQ, & HQ. adeóque erit rectangulum ſub AR, & octo AR, BS, CT, &c. ſubduplum rectanguli ſub AR & nouem prædictis AI, BK, CL, &c. ſed etiam demonſtratum eſt, Rectangulum ſub minima & tot lineis inter ſe, & maximæ æqualibus (quot vnitates continet numerus productus ex multiplicatione 8 numeri partium maximæ lineæ, per 9 numerum totidem, plus vnius, linearum) æquale quadratis omnibus nouem AI, BK, &c. ſimul ſumptis; hoc eſt rectangulum ſub minima & ſub lineis 72. (numero producto ex ducto numero 8 in 9.) inter ſe & maximæ æqualibus, nouem quadratis nouem linearum AI, BK, &c. æquale.

Eſt ergo rectangulum ſub AR minima, & nouem lineis AI, BK, CL inter ſe & maximæ æqualibus, contentum, ſuboctuplum rectanguli ſub AR & lineis 72. prædictis. Sed rectangulum ſub AR, & octo AR, BS in progreſſione poſitis, eſt ſubduplum rectanguli ſub AR & nouem lineis AI, BK, &c. quare rectangulum ſub AR & ſub lineis octo progreſſionis AR, BS, &c. ſubſexdecuplus erit omnium quadratorum linearum nouem AI, BK, CL, &c. & ſummæ ipſorum erit vna pars decima ſexta, quæ denominatorem habet 16. numerum duplum numeri linearum progreſſionis, nempe 8. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Minuitur ergo ratio rectanguli ſub minima & totidem, quot ſunt in progreſſione, plus vna lineis, ad ſummam totidem quadratorum, in ſequenti progreſſione duplicato linearum numero, in ratione ſubdupla eius, quam in antecedenti tenebat. atque adeo ſemiſſis ipſius ratio pariter imminuitur, hoc eſt rectanguli ſub AR, & omnibus in progreſſione poſitis.

O

COROLLARIVM II.

Duplicato igitur in infinitum numero linearum progressionis arithmeticæ; in infinitum imminuetur ratio rectanguli sub AR & omnibus in progressione positis, ad summam quadratorum omnium totidem A I, B K, &c. plus vnius quadrato. Cúmque imminutio rationis fiat in proportione subdupla continua; tota ratio rectanguli sub AR & omnibus in progressione positis, ad summam prædictorum omnium quadratorum auferetur, & nulla erit, simúlque tota magnitudo rectanguli auferetur, positis omnibus quæ in progressione accipi possunt; omnibúsque positis, plus vna, inter se & maximæ æqualibus; tunc enim, vt infinitæ lineæ in progressione erunt; sic in vnaquaque linea partes infinitæ inter se æquales intelligentur, cùm totidem partes in singulis lineis, quot lineæ positæ sunt, statuantur: pars vna ergo punctum erit, sub quo & lineis infinitis nullum rectangulum comprehendi potest.

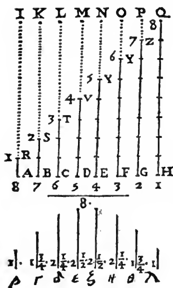
Imminutam autem rationem secundùm proportionem continuam geometricam, totam tandem auferri positis omnibus, quæ accipi possunt imminutionibus, simúlque totam magnitudinem, eodem modo demonstrabitur ac propositio 33. huius, quando conuertetur. in ea enim partium continuè proportionalium additione infinita magnitudinem effici ostendimus. pari modo conuersim per earumdem partium ablationem, magnitudinem totam auferri ostendere licet.

PROPOSITIO LXVII.

Differentia tripli quadratorum linearum octo A R, B S, &c. in progressione positarum, & summæ quadratorum totidem, plus vnius, linearum inter se & maximæ æqualium, hoc est nouem linearum inter se & maximæ H Q æqualium, æqualis est rectangulo sub minima AR & omnibus in progressione positis AR, BS, &c. contento.

DEMONSTRATIO.

HOc ab Archimede prop. 10. de lineis spiralibus demonstratum. Cùm enim hæc simul quadrata omnia rectarum linearum nouem inter se & maximæ HQ æqualium, & rectan-



gulum ſub AR minima & omnibus octo AR, BS, CT, ſimul ſumpta tripla ſint quadratorum omnium octo in progreſſione poſitarum AR, BS, CT, &c. differentia tripli horum quadratorum, & ſummæ quadratorum linearum totidem, plus vnius, hoc eſt nouem linearum inter ſe & maximæ HQ æqualium, eſt rectangulum ſub AR, & omnibus octo AR, BS, in progreſſione poſitarum. Conſtat ergo quod proponebatur.

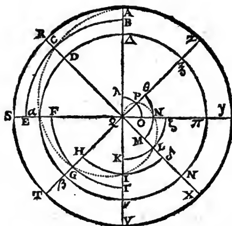
COROLLARIVM.

Vbi igitur progreſſio infinita linearum ſeſe æqualiter excedentium, & quarum minima æqualis ſit exceſſui, accipi poterit, ibi differentia tripli quadratorum linearum in progreſſione poſitarum, & ſummæ quadratorum totidem linearum infinitarum plus vnius inter ſe & maximæ æqualium, nulla erit in termino progreſſionis, poſitis ſcilicet omnibus lineis quæ accipi poſſunt; cùm rectangulum ſub minima & omnibus in progreſſione tunc nullum ſit, vt in Corollario ſecundo præcedentis oſtendimus.

PROPOSITIO LXVIII.

Figura, in qua linearum ſeſe inuicem æqualiter excedentium, & quarum exceſſus minimæ ſit æqualis, progreſſio infinita accipi poteſt, cuiúſque menſura ſit ſumma quadratorum linearum in progreſſione infinita acceptarum. ſubtripla erit figuræ in qua totidem, plus vna, lineæ accipi poterunt inter ſe & maximæ æquales; cuius menſura ſit ſumma quadratorum omnium harumce linearum inter ſe & maximæ æqualium. Ideóque ſpatium contentum ſpirali & prima linea, ſubtriplum eſt circuli primi.

DEMONSTRATIO.



SIт ſpiralis QNIαA primæ circulationis, cuius principium Q. idémque centrum circuli primi AZVS. linea prima QA circuli ſemidiameter. Eſt itaque ſpatium ſpirali QNIαA & linea prima QA contentum figura, in qua linearum ſeſe inuicem æqualiter excedentium, & quarum minimæ exceſſus ſit æqualis, progreſſio infinita accipi poteſt. Cúmque ipſa ſpiralis per infinitos circulos tranſeat, vt infrà oſtendetur, infinitæ illæ in progreſſione acceptæ lineæ circulorum ſemidiametri erunt. generatur itaque ſpiralis tranſitu puncti mobilis in prima linea per infinitos circulos; menſura itaque illius figuræ comparata erit ſumma quadratorum omnium linearum in progreſſione acceptarum. Sed & circulus eſt figura in qua totidem, plus vna, lineæ accipi poſſunt; & menſura illius comparata eſt quadratum ſemidiametri; ad ſpiralem igitur, quæ per infinitorum circulorum infinitas ſemidiametros tranſit, comparabitur circulus, per quadratorum omnium, plus vnius, ſemidiametrorum ſummam; ad quadratorum omnium ſemidiametrorum circulorum, per quos ſpiralis tranſit, ſummam. Sed ſimul acceptis omnibus lineis progreſſionis ſeſe æqualiter excedentibus; & totidem, plus vna, inter ſe & maximæ progreſſionis æqualibus, per corollarium præced. prop. oſtenſum eſt, quòd nulla ſit differentia tripli quadratorum linearum in progreſſione poſitarum, & ſummæ quadratorum totidem, plus vnius, linearum inter ſe & maximæ æqualium. quare horum ſumma æqualis erit triplo quadratorum linearum in progreſſione. Sed hæc ſumma æqualis illi triplo eſt

menſura circuli; quadratorum autem linearum in progreſſione poſitarum ſumma eſt menſura ſparij ſpirali & linea prima contenti. Ergo circulus triplum eſt ſparij. & inuertendo ſpatium eſt circuli ſubtriplum. Quod erat oſtendendum.

Eodem modo demonſtrabitur propoſitio 54. hoc eſt ſpatium contentum ſub parte ſpiralis QNIα (cuius terminus alter eſt Q ipſius principium) & linea Qα (quæ à principio ad alterum terminum α portionis ſpiralis ducta eſt) contentum, tertiam partem eſſe portionis ΔNα, circuli cuius ſemidiameter eſt Qα; quæ portio inter QΔ lineam primam & Qα ad partes antecedentes circulationis conſtituitur.

Eodem adhibito medio, oſtendetur conus, qui eamdem baſim & altitudinem cum cylindro habet, ſubtriplus cylindri.

MONITVM.

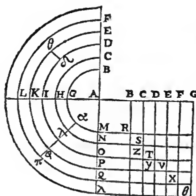
Hæc etiam propoſitio 68. demonſtrari poteſt per propoſit. 1. exercitationis primæ, quam huic de ſpiralibus tractatui ſubiiciemus.

Cùm enim ſimul ſumpta omnia quadrata linearum plus vnius quadrato, quæ inter ſe & maximæ æquales ſunt, minora ſemper ſint quàm triplum quadratorum linearum in progreſſione poſitarum, quantitate rectanguli ſub minima & omnibus in progreſſione poſitis; & cùm ratio illius rectanguli, ad omnium quadratorum linearum inter ſe & maximæ æqualium ſummam, continuè minuatur in proportione ſubdupla, magis ac magis minuitur differentia quâ minor eſt ſumma horum triplo quadratorum linearum in progreſſione poſitarum. propterea magis ac magis in infinitum accedit ad triplum quadratorum linearum progreſſionis. Pariter ratio tripli ſummæ quadratorum horum, ad ſummam quadratorum omnium linearum, plus vnius, maximæ & inter ſe æqualium, in eadem ratione in infinitum, imminuitur; quare in termino progreſſionis, in quo ex vna parte omnes lineæ, quæ accipi poſſunt, ponentur; & ex alia omnes lineæ, plus vna inter ſe & maximæ æquales, erit triplum ſummæ omnium quadratorum linearum progreſſionis, æquale omnium quadratorum linearum totidem, plus vnius, inter ſe æqualium ſummæ.

PROPOSITIO LXIX.

Si circuli circa vnum circulum magnitudine datum ab eodem centro deſcribantur, qui ſeſe penes diametros æqualiter excedant. ſpatia comprehenſa inter circulos ſic ordinatos ſe habent ad inuicem, vt gnomones inter quadrata ſemidiametrorum eorumdem circulorum comprehenſi.

DEMONSTRATIO.



SIT circulus magnitudine datus ABGM, cuius centrum ſit A; ſuper quo circa datum circulum deſcribantur circuli CH, DI, EK, FL, & extimus; quorum diametri ſeſe æqualiter excedant, id eſt æquales ſint GH, HI, IK, KL. Dico ſpatia comprehenſa inter circulos ſic ordinatos ad inuicem ſe habere, vt gnomones inter quadrata ſemidiametrorum eorumdem circulorum comprehenſi ad inuicem ſe habent. id eſt ſpatium MNHCBG eſſe ad ſpatium OIDCHN, vt gnomon NSCBR inter quadrata AR, AS comprehenſus eſt ad gnomonem NOTDC comprehenſum inter quadrata AS, AT.

Eſt enim vt quadratum AB ad quadratum AC, ita circulus BG ad circulum CH. & inuertendo; vt quadratum AC ad quadr. AB, ita circulus CH ad circulum BG. & diuidendo; vt AC quadratum ad gnomonem BSM; ita circulus CH ad ſpatium BMNHC (per totam circumferentiam acceptum) & per conuerſionem rationis; vt AB quadratum ad gnomonem BSM; ita circulus AB ad ſpatium BMNHC. & vt quadratum AC ad quadratum AD; ita circulus CHN ad circulum DIO. vtque in antecedenti inuertendo, diuidendo & per conuerſionem rationis, erit vt AC quadratum ad gnomonem CTN; ita circulus CH ad ſpatium CDION. erit ergo vt circulus ABG

ad ſpatium BMNHC; ita quadratum AB ad gnomonem BSM. atque etiam vt circulus CH ad ſpatium CDION; ita quadratum AC ad gnomonem CDION. ab æquali ergo erit, vt ſpatium BMNHC ad ſpatium CDION; ita gnomon BSM, ad gnomonem CTN. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXX.

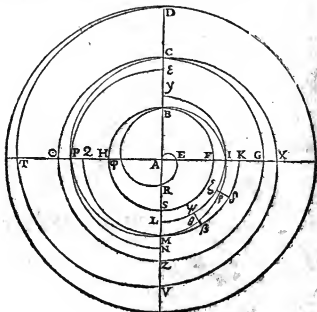
Spatia illa inter circulos æqualibus differentiis ſeſe ſuperant, vt & gnomones circa quadrata æqualibus differentiis ſeſe excedunt.

DEMONSTRATIO.

DEMONSTRATVM eſt, eſſe ſpatium CBHNM ad ſpatium CDION, vt gnomon BSM ad gnomonem CTN; & CDION ad DEKPO, vt gnomon CTN ad gnomonem DVO. eſt autem gnomon BSM ad gnomonem CTN, vt duo rectangula ABC, ACB, ad duo rectang. ACD, ADC. eſt etiam gnomon CTN ad gnomonem DVO, vt duo rectangula ACD, ADC, ad duo ADE, AED. & ſic deinceps. ſed gnomon CTN excedit gnomonem BSM duobus quadratis BC. & gnomon DVO excedit CTN duobus quadratis CD; ſunt autem BC, CD æquales, ergo exceſſus erit æqualis. quare cùm ſit vt gnomon ad gnomonem, ita ſpatium inter circulos ad ſpatium ſimile, hæc ſpatia æquali exceſſu ſeſe etiam ſuperabunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXI.

Spiralis in prima circulatione secunda & sequentibus transit per infinitos circulos.



DEMONSTRATIO.

HOc manifestum est. Cùm infiniti circuli BF, yI, KM, &c. describi possint circa A centrum principium spiralis primæ circulationis, per quos prima AERB & sequentes circulationes BIMPC secunda, & CXVTD tertia transeunt. & sic deinceps.

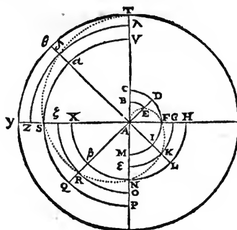
PROPOSITIO LXXII.

Spiralis per annularia spatia inter circulos penes diametrum sese æqualiter excedentes sub æqualibus ad centrum angulis comprehensa transiens,

transiens, illa sic diuidit, vt partes omnes inter spiralem & minores circulos interceptæ æqualiter sese superent; atque etiam partes aliæ inter eamdem spiralem & maiores circulos interceptæ, si in continua serie accipiantur, æqualiter sese excedant.

DEMONSTRATIO.

SPATIA annularia sub æqualibus angulis comprehensa, & quæ æqualiter sese excedunt, sunt FMNH, NXSP, SVTy, per quæ transit spiralis FKNRSꝺT. & tanquam diagonalis secat vnumquodque spatiorum à termino ad terminum oppositum. Dico, quòd spatiorum partes interceptæ inter spiralem & maiores circulos, hoc est HLNF, PSN, yTS, æquali excessu sese superant; atque etiam quòd partes inter spiralem & minores circulos interceptæ, hoc est MFN, XNS, TSV æqualiter sese excedant.



Bisecentur anguli CAF, NAH, ZAP, TAZ, ductis AD, AL, AR, Aα; fiántque sectores similes CAD, HAL, QAP, ZAꝺ. éxque punctis E, K, R, ꝺ, in quibus ductæ AD, AL, AR, Aꝺ secant spiralem, describantur arcus EB, KG, RO, ꝺZ; similes ergo sunt sectores, HAL, PAQ, ZAꝺ, & æquales sunt inter se propter spiralem GH, NO, SZ. Spatium itaque

GHLK erit ad ſpatium OQ, vt hæc ſimul rectangula AGH, AHG; ad rectangula ANO, AON. & ſpatium OQ eſt ad ſpatium Zθ; vt rectangula ANO, AON, ad rectangula ASZ, AZS.

Sed rectangula ANO, AON maiora ſunt rectangulis AGH, AHG quadrato OP, ſiue GH bis. rectangula verò ASZ, AZS, maiora ſunt duobus ANO, AON, quadrato Zy, ſiue OP bis; quare rectangula per quæ comparantur ſpatia GL, OQ, Zθ, æqualiter ſeſe ſuperant. quare & ſpatia GL, OQ, Zθ æqualiter etiam ſeſe ſuperabunt. & quotcumque in infinitum ſimul accipientur in ſingulis ſpatiis FNH, NSP, yTS. ſub ſimilibus ſectoribus ſpatia numero æqualia, qualia hîc accepta ſunt GL, OQ, Zθ, æqualiter ſeſe ſuperabunt rectangula per quæ comparabuntur. quare cùm maneat vbique æqualitas exceſſus, totum ſpatium yTS æquali exceſſu ſuperabit ſpatium NSP, ac NSP ſuperabit FNH. Idémque oſtendetur de ſpatio FNH ad BFC comparato. Spatia itaque illa in continua ſerie accepta æqualiter ſeſe ſuperant. Quod erat demonſtrandum.

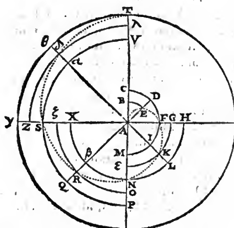
Eadem eſt demonſtratio de ſpatiis comprehenſis inter ſpiralem & minores circulos.

PROPOSITIO LXXIII.

Iiſdem poſitis. In omnibus annularibus ſpatiis per ſpiralem diuiſis, ſpatia adiacentia maioribus circulis, æquali exceſſu ſuperant adiacentia minoribus.

DEMONSTRATIO.

DIco ſpatium FNH excedere ſpatium MFN æquali exceſſu, ac NSP excedit ſpatium SNX. Continuetur GK arcus ad ε in AN; & accipiatur in ſpatio MFN ſector AKE æqualis ſectori HAL; ita vt ſint æquales inter ſe εN, FG, atque adeo ME, GH inter ſe etiam æquales. erit itaque ſpatium MK ad ſpatium KH, vt ſimul rectangula AMε, AεM, ad ſimul rectangula AGH, AHG; hæc autem maiora ſunt rectangulis AMε, AεM, duobus quadratis Mε ſeu GH, ſeu rectangulo FGH bis.



In ſpatio pariter annulari N S diuiſo per ſpiralem N R S, accipiantur ſectores ſimiles acceptis in annulari FN; & inter ſe æquales QAS, QAP. ita vt ſint inter ſe æquales ζS, NO, & rectis εN, FG. atque adeo æquales etiam inter ſe OP, ζX, & rectis etiam Mε, GH. erit ſpatium RP ad ſpatium RX; vt rectangula ARQ, AQR; ad rectangula AβR, ARβ. maiora autem ſunt ARQ, AQR rectangulis AβR, ARβ rectangulo NOP bis. quod æquale eſt rectangulo FGH bis. ergo ſpatia GL, OQ æquali exceſſu ſuperant, vnumquodque ſcilicet adiunctum, ſpatia KM, RX. & quotcumque in infinitum ſimul accipientur in ſpatiis ſingulis maioribus circulis adiacentibus, & ſub ſimilibus ſectoribus ſpatia numero æqualia; qualia accepta ſunt GL, OQ, Zθ. atque etiam in ſingulis minoribus circulis adiacentibus, & ſub ſimilibus ſectoribus ſpatia numero æqualia; qualia accepta ſunt KM, RX, αλ. omnia rectangula per quæ comparantur omnia ſpatia in ſpatio GNH accepta, æqualiter ſuperabunt omnia rectangula per quæ comparantur omnia ſpatia in MFN accepta; ac omnia rectangula æquali numero accepta, quæ reſpondent ſpatiis in NSP acceptis, ſuperant omnia rectangula quæ reſpondent ſpatiis in ſpatio SNX acceptis. Cùm ergo ſint ſpatia ad ſe inuicem vt rectangula, & rectangula ſeſe æqualiter ſuperent; ſpatium FNH, (in quo omnia in infinitum inſcriptibilia rectangula æqualiter ſuperant inſcriptibilia in infinitum in ſpatio MFN. ac inſcriptibilia in NSP ſuperant inſcriptibilia in SNX.) æqualiter ſuperabit ſpatium MFN; ac NSP ſuperabit SNX. Quod erat demonſtrandum.

Hic animaduertenda ſimilitudo, quæ inter ſpatia à ſpirali di-

uisa, & gnomones quadratis circumpositos intercedit.

In figura pag. 110. intelligatur AB latus primi quadrati AR sub duplum AC, quod latus est quadrati AS. quadratum itaque AR erit vnitatis vnius, & gnomon BSM trium erit vnitatum BS, RS, RN. pars autem gnomonis adhærens lateri AB seu M R quadrati primi, erit NR quæ est triens gnomonis, altera verò pars adhærens lateri AC, seu CS, quadrati secundi duos trientes complectitur. ita vt pars hæc BS, adhærens lateri quadrati secundi, superet partem NR adhærentem lateri primi quadrati, vno quadrato differentiæ laterum.

Ita in figura pag. 108. λQP, qui est velut gnomon circumpositus primo circulo, quem hîc repræsentat punctum Q. à spirali Q P ita diuiditur, vt pars QP adhærens circulo minori, seu puncto Q, sit vnus triens spatij totius λQP, quod maiori circulo λ P adhæret.

Deinceps etiam maioris quadrati lateri gnomonis pars quæ adhæret, superat partem, quæ minori adiacet, vno quadrato excessus laterum duorum sese immediatè sequentium. vt CT rectangulum excedit rectangulum NZ quadrato ZT, cuius latus est CD, differentia nempe laterum AC, AD. Ita in spatiis à spirali sectis POθN pars OPN quæ minori circulo P O adhæret, minor est parte PNθ, quæ maiori circulo θN adiacet, triente spatij sectore λQP comprehensi, & hoc vbique in annularibus seu gnomonibus LMNζ, IKLδ, & sequentibus.

Vt gnomonis partes lateribus quadratorum adiacentes minoribus æqualiter in serie continua sese excedunt; vt RN, SO, TP quadrato nempe RS. pariter maioribus lateribus quadratorum adiacentes partes, æqualiter sese excedunt, vt BS, CT, D V, quadrato nempe CD. ita & in spatiis quæ secat spiralis, inter duos circulos comprehensis, partes minoribus circulis adiacentes æqualiter sese superant, & illæ quæ maioribus adhærent, sese æquali excessu excedunt vnitate scilicet, vt in diagrammate prop. 61. videre licet.

MONITVM.

Ne cui videatur obscurior demonstratio proposit. XXXVII. sequentes demonstrationes addidimus, quibus explicantur progressionis illius proprietates.

PROPOSITIO LXXIV.

Si numeri ab vnitate in progreſſione continua arithmetica, cuius exceſſus ſit vnitas, diſponantur; progreſſioníſque terminus ſit numerus par. iidémque numeri conuerſim diſponantur, ita vt minimo maximus reſpondeat, & alij deinceps. ſinguli qui ſibi reſpondent ſeſe multiplicantes, omnes productos pares efficient. & producti à progreſſionis terminis æqualiter diſtantes æquales erunt.

DEMONSTRATIO.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8
k	*l.*	*m.*	*n.*	*o.*	*p.*	*q.*	*r*
8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
8.	14.	18.	20.	20.	18.	14.	8
s.	*t*	*v*	*x*	*y*	*z*	*&.*	*i.*

SINT numeri ab vnitate in progreſſione continua arithmetica *abcdefgh* vnitate ſeſe ſuperantes. & progreſſionis terminus maximus *h* ſit par 8. iidémque numeri in alia ſerie *k l m n o p q r* conuerſim diſponantur, ita vt minimo *a* maximus *k* reſpondeat, hoc eſt vnitati octonarius, & deinceps alij vt in appoſita deſcriptione. Dico quòd omnes ſibi reſpondentes ſeſe multiplicantes, productos pares efficiunt.

Cùm enim par impari reſpondeat, vt vnitati numerus 8; binario 7, & ſic deinceps, manifeſtum eſt omnes productos *s*, *t*, *v*, *x*, *y*, *z*, *&*, *i*, eſſe pares, cùm numerus par imparem multiplicans, aut vice verſa, parem numerum producat.

Dico præterea, productos æqualiter à terminis *a*, *h*; ſeu *s*, *i*, diſtantes, inter ſe æquales eſſe.

Cùm enim poſiti ſint ordine conuerſo numeri; & minimus maximo reſpondeat; *g*, qui proximus eſt à maximo, reſpondebit *q*, qui proximus eſt à minimo; & *f* qui ſecundus à maximo reſpondebit *p*, qui ſecundus eſt à minimo, & ſic deinceps. erunt itaque in vna medietate *abcd* ſuperiores, æquales inferioribus alterius medietatis *rqpo*; & in altera, ſuperiores *efgh*, æquales inferioribus alterius medietatis *n*, *m*, *l*, *k*. Productus ergo *s* multiplicatione *a* per *k*, æqualis erit *i*, producto multiplicatione *h* per *r*. & multiplicatus *b* per *l* facit *t*, æqualem

&, qui producitur multiplicato *g* per *q*. & sic deinceps. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXV.

Si posita progressione arithmetica, quæ ab vnitate incipiat, à maximo termino initio facto partes, quarum denominator sit termini maximi numerus, ex terminis accipiantur, quæ ab vnitate simili progressione crescant, & per terminos progressionis ipsis respondentes multiplicentur: erunt producti numeri fractionum numeratores, quarum est denominator numerus termini maximi progressionis.

DEMONSTRATIO.

a,	*b*,	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*.
1.	2.	3.	4.	5	6.	7.	8
k.	*l*.	*m*.	*n*.	*o*.	*p*.	*q*.	*r*
8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
			s.	8.			
β.	ʃ.	δ.	ε.	ζ.	η.	θ.	λ.
8.	14.	18.	20	20.	18.	14.	8.

SINT in progressione arithmetica ab vnitate *a*, *b*, *c*, *d e f g h*. & à maximo termino *h*, initio facto, partes ex terminis *h*, *g*, *f*, *e*, *d*, *c*, *b*, *a*, accipiantur; quæ ab vnitate simili progressione crescant, & quarum denominator sit 8, numerus vnitatum maximi termini *h*, idémque numerus terminorum; nempe ab *h*, vna octaua accipiatur; à *g* duæ octauæ accipiantur; ab *f* 3; ab *e* 4; à *d* 5; à termino *c* 6; à *b* 7 octauæ, & ab *a* tandem octo octauæ accipiantur, & sub *h*, *g*, *f*, *e*, *d*, *c*, *b*, *a*, numeri acceptarum ex singulis partium exponantur, *r*, *q*, *p*, *o*, *n*, *m*, *l*, *k*, quarum denominator sit *s*. multiplicentur illæ acceptæ partes per terminos ex quibus acceptæ sunt, & sint producti numeri β, ʃ, δ, ε, ζ, η, θ, λ. Dico quòd hi producti fractiones sunt maximi termini *h*.

Cùm enim ex b 8. accipietur r una octaua, quota pars sit hæc fractio totius b per se notum, & eam exhibet multiplicatio numeratorum & denominatorum $\frac{8}{7}$ & $\frac{1}{8}$ proditur nempe r pars integra vna totius b. nempe $\frac{1}{8}$. pariter accepta pars q $\frac{2}{8}$ ex g $\frac{7}{1}$, multiplicatis numeratoribus inter se, similitérque denominatoribus, exhibetur numerator fractionis 14 & denominator 8. quare $\frac{2}{8}$ termini g seu 7. æquales sunt $\frac{14}{8}$. hoc est vni octauæ integræ totius b. & insuper $\frac{6}{8}$ vnius octauæ, & similiter in aliis. Omnes ergo numeri $\beta, \digamma, \delta, \epsilon$, &c. multiplicatione producti sunt numeratores fractionum, quarum denominator est termini maximi numerus. Si posita ergo progressione, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXVI.

Si termini progressionis in serie A nempe a, b, c, d, e, f, g, h, multiplicent terminos conuersæ B, singuli singulos sibi respondentes & producant positos in serie C. singuli etiam progressionis A multiplicent maximum terminum h, in serie D toties positum, quot sunt termini progressionis, faciántque progressionem E, cuius minimus terminus & excessus æquales sint inter se, & maximo termino progressionis primo positæ A. & sint differentiæ productorum in C & E, numeri in serie F. Dico has differentias æquales esse productis ex multiplicatione singulorum terminorum b, c, d, e, f, g, h, per singulos numeros in serie G superpositos illis respondentes & singulis vnitate minores.

DEMONSTRATIO.

G		1	2	3	4	5.	6.	7	Summæ
A	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*	*f.*	*g.*	*h.*	
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8	36. K
B	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
C	8.	14.	18.	20.	20.	18.	14.	8	120. L
D	8.	8.	8.	8.	8.	8.	8.	8.	512. Q
P	64	64	64	64	64	64	64	64	
E	8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	288. M
F		2.	6.	12.	20.	30.	42.	56.	168. N
H	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64	204. O

CVM enim terminus *h.* nempe 8. vnitatem ipsi respondentem & 8. multiplicet, differentia productorum in serie C & E, id erit quod producetur ex multiplicatione *h* nempe 8 per 7 differentiam vnitatis & octonarij. quare differentia producti 8 in serie C, & 64 in serie E, æqualis erit ei quod producitur ex 7 ducto in 8. nempe 56 in serie F posito, qui colligitur ex subtractione 8 ex 64.

Pariter terminus *g*, 7, multiplicat 2 ipsi respondentem, & 8. itaque differentia productorum id erit, quod producetur ex multiplicatione 7, & 6; quo differt 2 ab 8. productum autem est 42. quare differentia producti 14 in serie C, & 56 in serie E, æqualis erit ei, quod producitur ex 7 ducto in 6. nempe 42 in serie F posito. & sic deinceps. differentia autem 1, 2, 3, &c. & 8. minor est terminis singulis, quibus respondet vnitate vna, quoniam prima subtractio ab octonario incepit, à quo ablata vnitas residuum est 7 minor quàm 8 vnitate. & cùm *g* ab *h* vnitate deficiat tantùm, binarius iam aufertur ab octonario; & differentia seu residuum 6, minor fit quàm *g* 7 vnitate vna. Ergo si termini progressionis, &c. Quod erat demonstrandum.

Si progressio fuerit quatuor terminorum idem demonstrabitur.

PROPOSITIO LXXVII.

Iisdem positis. Dico, quòd summa omnium differentiarum in serie F positarum, quâ progressionis E summa excedit summam productorum C, æqualis est O summæ quadratorum terminorum progressionis a b c d e f g h, dempta ipsius progressionis summa.

DEMONSTRATIO.

VNAQVÆQVE enim differentia producta est, multiplicato termino progressionis, per alium vnitate minorem, nempe 7 per 6. deinde 6 per 5. Vnaquæque ergo differentia minor est quàm quadratum termini progressionis, semel sumpto ipsomet termino. Omnes ergo differentiæ in serie F minores erunt quàm quadrata terminorum *b c d e f g h*, horum septem terminorum summâ videlicet. sed quadratis terminorum septem

addito

addito quadrato *a*. & ſummæ ſeptem terminorum *b c d e f g h* addito termino *a*, ſumma terminorum octo adhuc erit differentia inter N, ſummam differentiarum in ſerie F contentarum, & O ſummæ quadratorum in ſerie H. ergo O ſumma quadratorum in ſerie H dempta K ſumma progreſſionis A æqualis eſt N ſummæ differentiarum in ſerie F poſitarum. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXVIII.

Iiſdem poſitis. Dico, quòd ſumma productorum in ſerie C, nempe L, æqualis eſt exceſſui ſummæ progreſſionis E (quæ totidem eſt terminorum ac poſita in ſerie A, quæque primum terminum & exceſſum inter ſe & maximo progreſſionis in A ſerie termino æquales habet) ſupra ſummam quadratorum progreſſionis A in ſerie H poſitorum, dempta K ipſius A progreſſionis ſumma.

DEMONSTRATIO.

G		1	2	3	4	5.	6.	7	Summæ
A	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*	*f.*	*g.*	*h.*	
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8	36. K
B	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
C	8.	14.	18.	20.	20.	18.	14.	8	120. L
D	8.	8.	8.	8.	8.	8.	8.	8.	512. Q
P	64	64	64	64	64	64	64	64	
E	8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	288. M
F		2.	6.	12.	20.	30.	42.	56.	168. N
H	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64	204. O

CVM enim M, ſumma progreſſionis E ſuperet L, ſummam productorum in C omnibus differentiis in ſerie F poſitis, nempe ſumma N. hæcque ſumma N differentiarum in ſerie F cùm ſit æqualis O, ſummæ quadratorum progreſſionis A in ſerie H poſitorum, dempta K ſummæ ipſius progreſſionis A; erit etiam exceſſus M ſummæ progreſſionis in E ſupra ſummam

Q

productorum in ſerie C poſitorum, æqualis O ſummæ quadratorum progreſſionis A, dempta ipſius progreſſionis A ſumma K. Quare O ſumma quadratorum in ſerie H (dempta ab ipſa K ſumma progreſſionis A) & L ſumma productorum in ſerie C ſimul ſumptæ, æquales ſunt M ſummæ progreſſionis E. ergo eſt L, ſumma productorum in ſerie C, æqualis exceſſui, quo M, ſumma progreſſionis E, ſuperat O, ſummam quadratorum progreſſionis A in ſerie H poſitorum, dempta ab ipſa progreſſionis ſumma A. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXIX.

Iiſdem poſitis. Dico M, ſummam progreſſionis E, eſſe ad K ſummam progreſſionis A; vt progreſſionis A maximus terminus h, ad a minimum eiuſdem.

DEMONSTRATIO.

Vid. tab. pag. ſeq.

CVM vtraque progreſſio ſit arithmetica, termini in vnaquaque æqualiter ſeſe ſuperant. ſed in progreſſione A, quæ ab vnitate incipit, termini vnitate ſeſe ſuperant. In progreſſione verò E, quæ ab *h* maximo termino progreſſionis A incipit, eodem ſeſe ſuperant; æquæ multiplices ergo erunt termini progreſſionis E ad ipſius primum, ac termini progreſſionis A ad ipſius primum nempe vnitatem; & permutando, æquè multiplices erunt termini progreſſionis E, ad terminos progreſſionis A, ac primus progreſſionis E ad primum progreſſionis A. ergo tota progreſſio E æquè multiplex erit progreſſionis A; ac 8 primus terminus progreſſionis E, primi termini progreſſionis A: nempe vnitatis. ſed & æquè multiplex eſt terminus maximus *h* ad terminum minimum A. nempe 8 ad 1. quare vt tota progreſſio E ad totam progreſſionem A. ita maximus huius terminus *h* ad minimum *a*. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Summa igitur progreſſionis A per ipſius maximum terminum multiplicata, æqualis eſt M, ſummæ progreſſionis E. & vice verſa ſumma progreſſionis E per *h* maximum terminum progreſſionis A diuiſa, æqualis eſt ſummæ progreſſionis A.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam ſequitur, ſummam quadratorum in ſerie H, nempe O, dempta K ſumma progreſſionis A, per *h* maximum eius terminum diuiſam ſe habere ad ſummam progreſſionis A; vt ſumma quadratorum eorumdem dempta K ſumma progreſſionis A, ad M ſummam progreſſionis E. ſunt enim per communem menſuram *h* diuiſæ. & pariter ſumma L diuiſa per *h* ſe habet ad K, vt ipſa ſumma L, ad ſummam M.

PROPOSITIO LXXX.

Iiſdem poſitis. Summa progreſsionis M maior eſt quàm ſemiſsis ſummæ quadratorum P, ſemiſſe quadrati maximi termini h.

DEMONSTRATIO.

G		1	2	3	4	5.	6.	7	Summæ
A	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*	*f.*	*g.*	*h.*	
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8	36. K
B	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	
C	8.	14.	18.	20.	20.	18.	14.	8	120. L
D	8.	8.	8.	8.	8.	8.	8.	8.	512. Q
P	64	64	64	64.	64	64	64	64	
E	8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	288. M
F		2.	6.	12.	20.	30.	42.	56.	168. N
H	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	204. O

CVM enim termini in ſerie D ſeſe ipſi multiplicent, faciunt quadrata in ſerie P. Sed termini *a b c d e f g* multiplicantes terminos in D, minores efficiunt productos in E, quàm quadrata P, numeris ſcilicet productis multiplicatione termini *h* per differentiam ſeptem terminorum *a b c d e f g* ab ipſo *h*: quare ſeptem erunt differentiæ, videlicet *g* & *h* 1; *f* & *h* 2; *e* & *h* 3; & ſic deinceps, eritque vltima *a* & *h* 7. quæ multiplicantes *h*, terminos producunt in E progreſſione poſitos dempto vltimo

(64) quorum summa excessus est summæ Q supra M. bis itaque summa M minus quadrato *b* (64) æqualis est summæ Q. Igitur summa M minus semisse quadrati H æqualis est Q summæ quadratorum in serie P. & proinde summa M maior est quàm semissis quadratorum P. semisse quadrati maximi termini *b*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXXI.

Si ex numero quadrato auferatur summa progressionis ab vnitate ad numerum, qui latus est quadrati, residuum æquale est summæ progressionis dempto eius maximo termino.

DEMONSTRATIO.



THEOREMA pertinet ad numeros polygonos. In apposita figura sit quadratum AQ 64, cuius latus Q*g* sit 8. summa progressionis ab vnitate constat rectangulis AR, BS, CT, DV, EX, Fy, GZ, HQ. seu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, quorum summa est 36. illa itaque rectangula ablata ex quadrato relinquunt cætera rectangula, quorum maximum est à Z in I æquale GZ, súntque 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 quorum summa est 28; & sic constat quod proponebatur.

PROPOSITIO LXXXII.

Iisdem positis quæ in propositione 76. Dico, quòd summa quadratorum a, b, c, d, e, f, g & summa progressionis eorumdem terminorum simul sumptæ æquales sunt omnibus differentiis simul sumptis in serie F.

DEMONSTRATIO.

CVM ostensa * sit summa omnium differentiarum in serie F positarum, æqualis O summæ quadratorum terminorum progressionis *abcdefgh* in serie H positorum, dempta ipsius progressionis summa K. si ab vltimo quadrato *h* (nempe 64) auferatur summa progressionis K, per propos. antecedentem residua erit summa progressionis terminorum septem *abc defg* (nempe 28) ergo hæc simul, septem quadrata *abcdef gh* & summa progressionis eorumdem terminorum, æqualia erunt omnibus differentiis in F serie positis. Quod erat demonstrandum.

* Prop. 77.

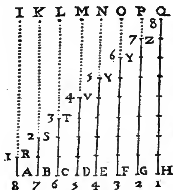
PROPOSITIO LXXXIII.

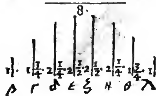
Si lineæ quotlibet, quæ sese æqualiter excedunt, deinceps ponantur; sitque excessus minimæ earum æqualis. & aliæ item ponantur lineæ numero quidem æquales prædictis, vnaquæque verò earum æqualis maximæ. Quadrata illarum omnium, quæ maximæ æquales sunt, dempta vna linea, seu rectangulo sub minima & maxima progressionis, tripla sunt horum simul; quadratorum scilicet earum omnium, dempto maximæ quadrato, quæ sese æqualiter excedunt, & rectanguli sub minima & composita ex omnibus, dempta maxima, quæ sese æqualiter excedunt.

DEMONSTRATIO.

SINT magnitudines sese æqualiter excedentes AR, BS, CT, DV, EX, Fy, GZ, HQ deinceps positæ; sitque excessus æqualis A minimæ earum. & aliæ item ponantur lineæ, numero æquales prædictis, IA, KB, LC, MD, NE, OF, PG, QH, vnaquæque verò earum æqualis HQ maximæ. Dico, quòd quadrata omnium, quæ maximæ æquales sunt, dempta linea vna, nempe quadrata IA, KB, LC, MD, NE, OF, PG, QH, dempta QH (seu rectangulo sub minima AR, & QH) tripla esse horum simul, quadratorum linearum quæ sese æqualiter excedunt AR, BS, CT, DV, EX, Fy, GZ, HQ (dempto maximæ HQ quadrato) & rectanguli comprehensi sub minima AR &

compoſita ex illis omnibus, dempta maxima, quæ ſeſe æqualiter excedunt.





Demonſtratum eſt ab Archimede, hæc ſimul ſumpta, quadrata omnium æqualium maximæ, & ipſius maximæ, hoc eſt rectarum IA, KB, LC, MD, NE, OF, PG, QH & QH, & rectangulum ſub AR minima & compoſita ex omnibus AR, BS, CT, DV, EX, Fy, GZ, QH, tripla eſſe quadratorum AR, BS, CT, DV, EX, Fy, GZ, QH.

Oſtenſum eſt item quadratum QH æquale eſſe, rectangulo comprehenſo ſub AR minima, & compoſita ex QH & omnibus GZ, Fy, EX, DV, CT, BS, AR bis ſumptis; id eſt his duobus, rectangulo ſub minima AR, & omnibus octo ſeſe æqualiter excedentibus; & rectangulo ſub minima AR, & compoſita ex ſeptem AR, BS, CT, DV, EX, Fy, GZ. Itaque quadratum QH vnà cum rectangulo ſub AR minima & maxima QH, æquale erit duobus rectangulis ſub AR minima & compoſita ex omnibus octo AR, BS, CT, &c. quadratum igitur QH, rectangulum ſub AR minima & QH maxima; & rectangulum ſub AR minima & compoſita ex omnibus octo AR, BS, CT, &c. ſimul ſumpta tripla ſunt rectanguli ſub AR & compoſita ex octo AR, BS, CT, &c. quare, cùm ex ſumma nouem quadratorum totidem linearum maximæ æqualium, & rectanguli ſub minima AR & compoſita ex omnibus octo AR, BS, CT, &c. auferentur quadratum vnum, & rectangulum ſub minima AR & maxima QH, itémque rectangulum ſub AR & compoſita ex octo AR, BS, CT, &c. id eſt cùm auferentur ex ſumma prædicta tria rectangula ſub AR & compoſita ex octo AR, BS, CT, &c. reſidua erunt octo quadrata IA, KB, &c. dempto rectangulo ſub minima & maxima.

Ex ſumma verò octo quadratorum AR, BS, CT, DV, EX, Fy, GZ, HQ. ablato rectangulo ſub AR & compoſita ex illis octo lineis AR, BS, &c. reſidua erunt quadrata ſeptem AR, BS, CT, DV, EX, Fy, GZ & rectangulum ſub AR & compoſita ex ſeptem AR, BS, CT, &c. hocce enim rectangulum, complementum eſt rectanguli ſub AR & compoſita ex octo AR, BS, CT, &c. ad quadratum QH.

Cùm ergo primarum magnitudinum maior ſit ad minorem tripla; & ablata à maiori tripla ſit ablatæ à minori; reſidua magnitudo maior, tripla erit reſiduæ minoris. Demonſtratum eſt ergo, quod proponebatur.

Corollarium.

Iiſdem, quæ in propoſitione 76, poſitis. Manifeſtum eſt ex proximè demonſtratis, quòd Q ſumma quadratorum omnium in ſerie P poſitorum, dempto rectangulo ſub *a* & *h*, tripla ſit ſummæ omnium differentiarum in ſerie F poſitarum. cùm hæ differentiæ æquales ſint quadratis ſeptem terminorum progreſſionis *abcdefg*, & ſummæ progreſſionis eorumdem terminorum ſimul ſumptis. quæ ſimul ſumpta ſubtripla ſunt omnium quadratorum in ſerie P, dempto rectangulo ſub *a* & *h*.

PROPOSITIO LXXXIV.

Sint duæ progreſſiones in ſerie A, quarum prima ſit quatuor terminorum abcd. ſecunda ſit octo terminorum a, b, cdefgh, & illæ conuerſo ordine diſponantur in ſerie B, & ſibi inuicem reſpondentes termini ſeſe multiplicent, & producti ponantur in ſerie C. In ſequenti verò ordine D terminus maximus progreſſionis toties ponatur, quot ſunt termini in progreſſione vnaquaque; in ſerie deinde P tot maximi termini quadrata. Deinde verò in ſerie E ponatur progreſſio, cuius minimus terminus, & exceſſus æquales ſint maximo termino progreſſionis A. & in ſerie F diſponantur differentiæ productorum in ſerie C, & terminorum progreſſionis in E. quadrata tandem terminorum progreſſionis in A, diſponantur in ſerie H. Dico, quòd ſumma quadratorum in ſerie P dempto h maximo termino in A progreſſione octo terminorum, maior eſt octupla ſummæ quadratorum, dempto maximo termino d, in progreſſione A quatuor terminorum; & exceſſus æqualis eſt ter ſumpto h maximo progreſſionis ſecundæ termino.

DEMONSTRATIO.

G		1	2	3	Summæ	G		1	2	3	4	5	6	7.	Summæ
A	*a*	*b*	*c.*	*d*		A	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*	*f.*	*g.*	*h*	
	1.	2.	3.	4.	K. 10		1.	2.	3.	4	5	6	7	8.	K. 36.
B	4	3.	2.	1		B	8.	7.	6	5.	4.	3.	2	1	
C	4.	6.	6.	4	L. 20	C	8.	14.	18.	20.	20.	18.	14	8	L. 120
D	4.	4.	4.	4		D	8.	8.	8.	8.	8.	8.	8.	8.	
P	16.	16.	16.	16	Q 64	P	64.	64.	64.	64.	64.	64.	64.	64.	Q. 512
E	4.	8.	12.	16	M. 40	E	8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	M. 288
F		2.	6.	12	N. 20	F		2.	6.	12.	20	30	42.	56	N. 168
H	1.	4.	9.	16	O. 30	H	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	O. 204

CVM enim octo quadrata P in ſecunda progreſſione octupla ſint quadratorum quatuor P in prima progreſſione. cùm ex his quatuor auferetur terminus *d*, octupla eorum erunt octo quadrata, demptis ex ipſis octo *d*, ſeu quatuor *h*. ſed ex octo quadratis vnus ſolus *h* aufertur. quare ſumma octo quadratorum P in progreſſione ſecunda, dempto *h* termino maximo progreſſionis, maior erit octuplo quatuor quadratorum, dempto termino *d*; & erit exceſſus æqualis ter ſumpto *h* maximo progreſſionis ſecundæ A termino.

Eadem erit demonſtratio, quando earum differentiarum comparatio fiet in progreſſionibus octo, & ſexdecim terminorum.

PROPOSITIO LXXXV.

Iiſdem poſitis. Dico ſummam differentiarum in F ſerie poſitarum ſecundæ progreſſionis octo terminorum, maiorem eſſe quàm octuplum ſummæ earum, quæ in eadem ſerie F poſitæ ſunt in prima progreſſione quatuor terminorum, & exceſſum æqualem eſſe b, maximo progreſſionis A ſecundæ termino.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

G		1	2	3	Summæ		G		1	2	3	4	5	6	7.	Summæ	
A	*a*	*b*	*c.*	*d*			A	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*	*f.*	*g.*	*h*		
	1.	2.	3.	4.	K.	10		1.	2.	3.	4	5	6	7	8.	K.	36.
B	4	3.	2.	1			B	8.	7.	6	5.	4.	3.	2	1		
C	4.	6.	6.	4	L.	20	C	8.	14.	18.	20.	20.	18,	14	8	L.	120
D	4.	4.	4.	4			D	8.	8.	8.	8.	8.	8.	8	8.		
P	16.	16.	16.	16	Q	64	P	64.	64.	64.	64.	64.	64.	64.	64.	Q.	512
E	4.	8.	12.	16	M.	40	E	8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	M.	288
F		2.	6.	12	N.	20	F		2.	6.	12.	20	30	42.	56	N.	168
H	1.	4.	9.	16	O.	30	H	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	O.	204

CVM enim illæ differentiæ in F æquales ſint his ſimul ſumptis, ſummæ quadratorum in H ſerie, dempto maximo; & ſummæ terminorum progreſſionis A, dempto maximo, in prima progreſſione ac ſecunda. Hæcce verò quadrata & termini progreſſionis ſimul ſumpti, ſint ſubtripli omnium quadratorum P, dempto maximo progreſſionis termino, vt iam demonſtratum eſt; atque etiam oſtenſum ſit, quòd ſumma quadratorum P in ſecunda progreſſione, dempto maximo termino *h* progreſſionis A, maior ſit quàm octuplum ſummæ quadratorum P in prima progreſſione, dempto maximo termino *d* progreſſionis A. quódque illius exceſſus ſit æqualis tribus terminis *h*. erit propterea exceſſus ſubtripli quadratorum octo, ab eis dempto termino *h*, ſupra ſubtriplum quadratorum quatuor, dempto ab eis maximo termino, ſubtriplus trium terminorum *h*. erit ergo ſumma differentiarum in F ſerie poſitarum ſecundæ progreſſionis octo terminorum maior, quàm octuplum ſummæ earum, quæ in eadem ſerie F poſitæ ſunt in prima progreſſione quatuor terminorum, & exceſſus æqualis *h* maximo termino ſecundæ progreſſionis. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXXVI.

Iiſdem poſitis. Summa K progreſsionis A æqualis eſt L & N,

summis productorum in serie C, & differentiarum in serie F per maximum terminum h diuisis.

DEMONSTRATIO.

G	1	2	3		Summæ		G	1	2	3	4	5	6	7.		Summæ	
A	*a*	*b*	*c.*	*d*			A	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*	*f.*	*g.*	*h*		
	1.	2.	3.	4.	K.	10		1.	2.	3.	4	5	6	7	8.	K.	36.
B	4	3.	2.	1			B	8.	7.	6	5.	4.	3.	2	1		
C	4.	6.	6.	4	L.	20	C	8.	14.	18.	20.	20.	18.	14	8	L.	120
D	4.	4.	4.	4			D	8.	8.	8.	8	8.	8.	8	8.		
P	16.	16.	16.	16	Q	64	P	64.	64.	64.	64.	64.	64.	64.	64.	Q.	512
E	4.	8.	12.	16	M.	40	E	8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	M.	288
F		2.	6.	12	N.	20	F		2.	6.	12.	20	30	42.	56	N.	168
H	1.	4.	9.	16	O.	30	H	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	O.	204

M Summa progressionis in E diuisa per *h*, maximum terminum, dat quotientem K summam progressionis. Sed summa progressionis E æqualis est hisce, simul sumptis productis in C. & differentiis in F, quare per maximum terminum *h* diuisi producti & differentiæ partes duas dabunt, quæ complent summam K. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ergo & excessus differentiarum in F secundæ progressionis supra differentias F primæ progressionis, cùm sit æqualis maximo termino *h*, reductus ad vnitates integras summæ K, hoc est diuisus per *h*, vnitatem valebit.

COROLLARIVM II.

Cúmque in prima progressione, diuisa summa differentiarum per maximum terminum *d*, reducatur ad vnitates integras primæ progressionis, atque etiam ad summam subquadruplam summæ N eiusdem. paritérque in secunda progressione, diuisa summa N per *h* maximum terminum reducitur ad integras vnitates secundæ progressionis, & summæ N primæ progressionis fit æqualis, plus vnitate. ergo etiam ad quadruplum redu-

ctæ summæ N primæ progressionis plus vnitate reducitur. ergo & in ratione quadrupla illæ differentiæ ab vna progressione ad aliam plus vnitate crescunt.

PROPOSITIO LXXXVII.

Si numeri ab vnitate in progressione arithmetica, cuius excessus sit vnitas in vna serie ponantur; & in alia serie numeri ab vnitate similiter progredientes duplo numero terminorum antecedentis. Dico, quòd quadruplum summæ progressionis in prima serie dempto maximo termino, æquale est summæ secundæ progressionis.

DEMONSTRATIO.

a.	*b.*	*c.*	*d.*	*e*	*f*	*g*	*h*	*k*	*l*	*m*	*n*
1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.

Summa 10. A — Summa 40—4. id est 36. B.

quadruplum 40 C.

SINT ab vnitate numeri in arithmetica progressione *a, b, c, d,* cuius excessus sit vnitas. & in alia serie numeri ab vnitate similiter progredientes duplo numero terminorum *e, f, g, h, k, l, m, n.* Dico quòd quadruplum summæ *a, b, c, d,* dempto *d* maximo termino, æquale est summæ progressionis *e, f, g, h, k, l, m, n.*

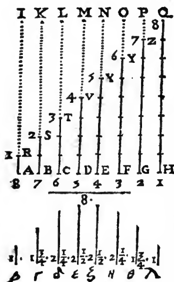
Cùm enim ab vnitate incipiat progressio, duplúsque sit numerus terminorum in secunda serie, & vnitate sese numeri superent, erit in ipsa progressio *e, f, g, h,* æqualis progressioni *a, b, c, d,* quæ in prima serie posita est. cùm verò *k, l, m, n,* superent *d* maximum terminum primæ progressionis; híque vnitate sese superent, erunt singulis

k		*d* † *a*
l	æquales	*d* † *b.*
m	singuli	*d* † *c*
n		*d* † *d.*

Quare hi quatuor *k, l, m, n* æquales sunt vni progressioni *a, b, c, d,* † 4 *d.* duæ igitur progressiones *a, b, c, d,* † 4 *d,* sunt æquales toti progressioni *e, f, g, h, k, l, m, n.* Est autem progressio *a, b, c, d,* bis sumpta æqualis 5 *d.* Sunt igitur 4 *d* minores, quàm progressio *a, b, c d* bis sumpta, vno *d.* Quatuor ergo progressiones *a, b, c, d,* maiores

sunt quàm progressio *e, f, g, h, k, l, m, n,* vno *d.* Quadruplum ergo A summæ progressionis *a, b, c d,* id est *c.* dempto maximo termino *d* æquale est summæ progressionis *e, f, g, h, k, l, m, n.* Quod erat demonstrandum.

ALIA DEMONSTRATIO.



SINT in figura apposita in prima serie progressio ABC D. in secunda ABCDEFGH. Dico quadruplum A B C D, dempto D, æquale esse omnibus ABCDEFG.

Est D semissis H. ergo in E FGH erit semel ABCD † 4 D. ergo tota progressio A B C D E F G H æqualis est A B C D bis † 4 D. est autem summa A B C D semis quinque D, ergo bis ABC D æquales sunt quinque D. quare A B C D quater maiores erunt ABCDEFGH vno D.

PROPOSITIO LXXXVIII.

Iisdem positis quæ in propositione 84. Dico, quòd producti in serie C, diuisi per maximum terminum progressionis (quæ est quatuor terminorum) quater sumpti, demptis maximo & minimo terminis eiusdem progressionis, nempe d & a; æquales sunt productis C secundæ progressionis (quæ est octo terminorum) per h maximum terminum eiusdem diuisis.

DEMONSTRATIO.

Vid. tab. pag. 130. HÆc enim simul; numeri scilicet in serie C, producti multiplicatione terminorum progressionis A per conuersos

ipsis respondentes in serie B, & differentiæ in serie F per *d* maximum terminum diuisi æquales sunt K summæ progressionis. quadruplum verò primæ progressionis quatuor terminorum dempto *d* maximo termino, æquale est summæ progressionis secundæ octo terminorum. ergo quadruplum horum simul productorum in serie C, & differentiarum in serie F per *d* diuisorum, dempto *d* maximo termino, æquale erit summæ progressionis secundæ octo terminorum. Sed differentiæ in F secundæ progressionis per *h* diuisæ, excedunt quadruplum differentiarum in serie F primæ progressionis & excessus est vnitas; ergo quadruplum differentiarum, & quadruplum productorum, demptis maximo termino *d* & vnitate, nempe termino minimo *a*, æquale est summæ progressionis secundæ. Hæ itaque partes quadruplum differentiarum, & quadruplum productorum, demptis duabus magnitudinibus *d* & *a*, cùm æquales sint summæ K secundæ progressionis, & vna (quadruplum differentiarum) maior sit quadruplo antecedentis; altera (quadruplum productorum) quæ complementum ad totam summam K progressionis A, minor erit quàm quadruplum antecedentis magnitudinibus demptis. Itaque producti in serie C diuisi per maximum progressionis primæ terminum *d* quater sumpti, demptis *d* & *a* maximo & minimo terminis eiusdem progressionis, æquales sunt productis C secundæ progressionis per *h* maximum terminum eiusdem diuisis. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Demonstrauimus itaque illa, quæ adsumpsimus in propositione 37.

Quasdam deinde propositiones subiiciemus ad eandem progressionem spectantes, quæ maximo vsui esse poterunt.

PROPOSITIO LXXXIX.

Iisdem positis ac in propositione 87. Dico, quòd hæc simul, primæ progressionis a, b, c, d, dempto d maximo termino, quadruplum, & maximus illius terminus simul sumpti, æquales sunt septem terminis a, b, c, d, e, f, g secundæ progressionis.

DEMONSTRATIO.

CVM enim quadruplum summæ *a, b, c, d, - d* æquale sit summæ *e f g h k l, m, n;* erit quadruplum *a b c* minus quàm summa *e, f, g, h, k, l, m, n,* quadruplo *d - d,* id est 3 *d,* est autem *n* æqualis 2 *d.* ablatis itaque vtrinque 2 *d,* erit quadruplum *a b c* minus quàm summa *e f g h k l m n,* vno *d.* Ergo quadruplum *a, b, c* † *d* æquale est septem terminis *a, b, c, d, e f, g.* Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XC.

Si numeri ab vnitate in progreßione arithmetica diſponantur, ita vt progreßionis terminus ſit numerus par, iidémque numeri conuerſim diſponantur. aliáque ſeries conuerſim etiam diſponatur, cuius maximus terminus qui maximi progreßionis duplus ſit, minimo progreßionis reſpondeat, & deinceps alij aliis vnitate à ſe inuicem deficientes. Dico, quòd producti per multiplicationem ſibi reſpondentium in progreßione & ſerie conuerſa, cuius terminus primus duplus eſt maximi numeri progreßionis, ſimul ſumpti excedunt productos per multiplicationem ſibi reſpondentium in progreßione & conuerſim poſitorum ſerie, producto multiplicationis ſumma progreßionis per maximum terminum eiuſdem.

DEMONSTRATIO.

a.	*b.*	*c.*	*d.*
1.	2.	3.	4.
Summa progreſſionis A. 10.			
d.	*c.*	*b.*	*a.*
4.	3.	2.	1.
Producti			
s.	*t.*	*v.*	*x.*
4.	6.	6.	4.
Summa productor. B. 20.			

a.	*b.*	*c.*	*d.*
1.	2.	3.	4.
k.	*l.*	*m.*	*n.*
8.	7.	6.	5.
Producti			
y.	*z.*	*f.*	*h.*
8.	14.	18.	20.
Summa productor. C. 60.			

Differentia productorum D 40. ex multiplicatione A 10. per *d* 4.

SINT numeri ab vnitate in progreſſione arithmetica *a,b,c,d,* cuius terminus ſit numerus par. & iidem conuerſim diſpo-

nantur *d, c, b, a;* aliáque feries *k, l, m, n*, conuerfim etiam difponatur, cuius maximus terminus *k*, duplus maximi progreffionis *d*, minimo progreffionis *a* refpondeat, & deinceps alij *l, m, n*, aliis *b, c, d*. Dico quòd *y, z, f, h*, producti per multiplicationem fibi refpondentium in progreffione *a b c d* & ferie conuerfa *k, l, m, n*, fimul fumpti, hoc eft C, excedunt productos per multiplicationem fibi refpondentium in *a, b, c, d* progreffione & conuerfa ferie *d, c, b, a;* producto multiplicationis A fummæ progreffionis per *d* maximum eius terminum.

Cùm enim *k* duplus fit ad *d; k* excedet *d* vno *d*. id eft quaternario. cúmque deficiant à fe inuicem vnitate *k, l, m, n*, atque etiam *d, c, b, a;* finguli *k, l, m, n*, fingulos *d, c, b, a* quaternario feu *d* fuperabunt. fed *a, b, c, d* multiplicant hunc exceffum *d*, qui eft etiam maximus progreffionis terminus. id eft A fumma ipforum multiplicat *d*, & facit D. quare *y, z, f, h* feu D fumma productorum per multiplicationem fibi refpondentium *a, b, c, d*, in progreffione, & *k, l, m, n*, conuerfim pofitorum, excedit *s, t, v, x* feu B fummam productorum per multiplicationem refpondentium fibi *a b c d*, & *d c b a* producto per multiplicationem fummæ progreffionis A & *d* maximum eius terminum. Quod erat demonftrandum.

PROPOSITIO XCI.

Si fummæ productorum s, t, v, x, addatur productum ex multiplicatione fummæ progreffionis A per maximum eiufdem terminum d. nempe D. fumma erit æqualis fummæ productorum y z f h nempe C. qui numeri producti funt multiplicatione numerorum progreffionis a b c d, & conuerfim pofitorum k l m n, quorum maximus k duplus eft termini d qui maximus eft progreffionis.

DEMONSTRATIO.

CVM enim in fuperiori demonftratum fit, fummam productorum *y, z, f, h*, excedere productos *s, t, v, x*, quantitate D, quæ ex multiplicatione A fummæ progreffionis per maximum eiufdem terminum *d* producitur; confequens eft, fummam productorum *s, t, v, x*, & quantitatem D æqualem fore productis *y z f h*. Quod erat demonftrandum.

PROPOSITIO XCII.

Summa progreßionis, & summa productorum per maximum terminum progreßionis diuiſa, ſimul ſumpta, æquales ſunt ſummæ productorum, in progreſsione ſecunda, ad partes integras reducta.

DEMONSTRATIO.

Cvm numeri producti *s*, *t*, *v*, *x*, ſint fractionum numeratores partium acceptarum in totidem, quot ſunt in progreſſione, terminis inter ſe & maximo æqualibus, quarum denominator eſt numerus maximi termini *d*, vel terminorum progreſſionis: quando ſumma ipſorum productorum per denominatorem *d* diuidetur, ad partes integras reducetur, quarum ſingulæ æquales erunt vnitati, ſeu minimo termino *a*; ſimiliter ſumma progreſſionis A, quia per maximum terminum *d* multiplicata & addita productis *s*, *t*, *v*, *x* dat ſummam productorum *y*, *z*, *f*, *h*. exhibet etiam ſummam numeratorum fractionum in ſecunda progreſſione. ipſa ergo A non multiplicata, & addita *s*, *t*, *v*, *x* ſummæ productorum, diuiſæ per maximum terminum *d*, exhibebit in partibus integris ſummam productorum in progreſſione ſecunda. ergo ſumma progreſſionis & ſumma productorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XCIII.

Si ab vnitate vna progreſsio ponatur a b c d, & altera a, b, c, d, e, f, g, h, quæ prioris dupla ſit terminorum numero, & conuerſim vtraque etiam ponatur, & numeri ſibi reſpondentes ſeſe multiplicent. Producti multiplicatione numeri in ſecunda progreſsione, æquales ſunt his ſimul ſumptis, bis ſummæ productorum multiplicatione in prima progreſsione, & ſummæ producta multiplicatione ſummæ progreſsionis primæ per maximum terminum progreſsionis ſecundæ.

a.	*b.*	*c.*	*d.*	A 10	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*	*f.*	*g.*	*h.*	
1.	2.	3.	4.		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	E. 36
4.	3.	2.	1.		8.	7.	6.	5.	4	3.	2.	1.	
n.	*m.*	*l.*	*k.*		*r.*	*q.*	*p.*	*o.*	*n.*	*m.*	*l.*	*k*	
4.	6.	6.	4.	C. 20.	8.	14.	18.	20	20.	18.	14.	8.	B 60.
differentia productor. 40. D					*s.*	*t.*	*v*	*x*	*y.*	*z.*	*β.*	*ſ.*	Semiſſis productor.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

DEMONSTRAVIMVS in præcedenti, quòd hæc simul sumpta, summa scilicet productorum *k l m n*, & summa producta ex multiplicatione summæ productionis A per maximum terminum *d*. æqualia sunt summæ productorum *s, t, v, x*; sed proposit. 74. demonstrati sunt producti *y z β ſ* æquales productis *s, t, v, x*, cùm ab iisdem numeris generentur. quare omnes producti *s t v x y z β ſ* dupli erunt productorum *s, t, v, x*. Igitur duplo eius quod his est æquale producti *s, t, v, x, y z β ſ* æquales erunt, nempe his simul sumptis, bis productis *n, m, l, k* & bis summæ, quæ ex multiplicatione summæ A progressionis *a, b, c, d*, per *d* maximum eius terminum producitur. seu æquales erunt bis *n, m, l, k*, & summæ A per *h* maximum terminum secundæ progressionis multiplicatæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XCIV.

Iisdem positis. Dico, quòd hæc simul, summa progressionis secundæ & maximus terminus primæ, æqualia sunt differentiæ productorum in prima progressione, & semissis productorum in secunda. qui producti intelligendi sunt ex multiplicatione sibi respondentium numerorum in progressione, & conuerso ordine dispositorum.

DEMONSTRATIO.

CVM enim differentia productorum C & semissis productorum B, sit æqualis summæ A in *d* ductæ. hoc est quater A. Summa autem progressionis secundæ sit æqualis quater A dempto *d*. erit summa progressionis plus *d* æqualis differentiæ D, productorum scilicet C, & semissis productorum D. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Excessus ergo semissis productorum secundæ progressionis supra productos primæ, maior est progressionis summa, quantitate termini maximi primæ.

FINIS.

SVMMA PRIVILEGII
Regis Christianissimi.

CAVTVM *est auctoritate Regis, ne quis in regno eius, aliisve locis eius ditioni subditis, librum qui sic inscribitur,* ISMAELIS BVLLIALDI de Lineis Spiralibus Demonstrationes nouæ, *quouis charactere, aut forma excudere, aut alibi excusum vendere, aliove quolibet modo distrahere possit intra quinque annos, computandos à die absoluta primæ editionis, præter Sebastianum Cramoisy, Regis & Reginæ Architypographum, Regiæ Typographiæ Gubernatorem, necnon Vrbis Exconsulem. Qui secùs fecerit, mulcta est indicta, prout fusiùs in diplomate regia continetur. Datum Parisiis die 23. Decembris 1656. Sic signatum, De mandato Regis,* CEBERET.

Hæc prima editio absoluta fuit die 23. Februarij 1657.